

ĐS9-CHUYÊN ĐỀ 1. BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

A.LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Căn thức bậc hai

-Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

-Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là \sqrt{a} là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a :

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

-Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.

-Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = A \sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = -A \sqrt{B} \text{ với } A < 0; B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M \cdot \sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; \text{ (Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu)}$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0, A \neq B \text{ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)}$$

2. Căn thức bậc ba, bậc n

a. Căn thức bậc 3

Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$

$$-\text{Cho } a \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

-Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.

-Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

-Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.

-Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ với mọi } b \neq 0.$$

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ với mọi a, b .

$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

$$A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3B}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{AB^2}}{B} \text{ với } B \neq 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\frac{A}{B^3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{A \pm \sqrt[3]{B}}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B} \text{ với } A \neq \pm B.$$

b. Căn thức bậc n

Cho số $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n của nó bằng a .

-Trường hợp n là số lẻ: $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$

Mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất:

$$\sqrt[2k+1]{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a. \text{ nếu } a > 0, \text{ thì } \sqrt[2k+1]{a} > 0, \text{ nếu } a < 0 \text{ thì } \sqrt[2k+1]{a} < 0, \text{ nếu } a = 0 \text{ thì } \sqrt[2k+1]{a} = 0$$

-Trường hợp n là số chẵn: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$.

Mọi số thực $a > 0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn dương kí hiệu là $\sqrt[2k]{a}$ (gọi là căn bậc $2k$ số học của a). Căn bậc chẵn âm kí hiệu là $-\sqrt[2k]{a}, \sqrt[2k]{a} = x \Leftrightarrow x \geq 0$ và $x^{2k} = a$,

$$-\sqrt[2k]{a} = x \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ và } x^{2k} = a.$$

II. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP TIÊU BIỂU

Dạng 1: Thu gọn các biểu thức đại số và tính giá trị các biểu thức.

Phương pháp:

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Biến đổi các biểu thức trong dấu $\sqrt{\quad}$ về dạng $\sqrt{A^2} = |A|$ sau đó dựa vào dấu của A để mở dấu giá trị tuyệt đối nếu có.

Ngoài ra cần nắm được các đẳng thức cơ bản quen thuộc:

- $ab + bc + ca = m \Rightarrow a^2 + m = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$;
- $a + b + c = n \Rightarrow na + bc = (a + b + c)a + bc = (a + b)(a + c)$;
- Với $abc = 1$ thì $\frac{1}{a + ab + 1} + \frac{1}{b + bc + 1} + \frac{1}{ca + c + a} = 1$;
- Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ với $abc \neq 0$.

Ví dụ 1.

Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b. $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x - 1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.

c. $C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải:

a. $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} - \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right|$

+ Nếu $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$.

b. $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x - 1}} = B = \sqrt{4x - 1 - 2\sqrt{4x - 1} + 1} + \sqrt{4x - 1 + 2\sqrt{4x - 1} + 1}$

$$\text{Hay } B = \sqrt{(\sqrt{4x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4x-1}+1)^2} = |\sqrt{4x-1}-1| + |\sqrt{4x-1}+1| = |\sqrt{4x-1}-1| + \sqrt{4x-1}+1$$

$$+ \text{ Nếu } \sqrt{4x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ thì } |\sqrt{4x-1}-1| = \sqrt{4x-1}-1 \text{ suy ra } B = 2\sqrt{4x-1}.$$

$$+ \text{ Nếu } \sqrt{4x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \text{ thì } |\sqrt{4x-1}-1| = -\sqrt{4x-1}+1 \text{ suy ra } B = 2.$$

$$\text{c. Để ý rằng: } 7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } C = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10(2-\sqrt{3})}}} = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$$

$$= \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}}} \cdot \text{ Hay } C = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}} = \sqrt{9-\sqrt{25}} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2.$$

Ví dụ 2.

Chứng minh:

$$\text{a. Tính } A = \sqrt{8-4\sqrt{3}} - \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$\text{b. } B = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \text{ là một số nguyên}$$

(Trích đề Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006).

$$\text{c. Chứng minh rằng: } x = \sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \text{ với } a \geq \frac{1}{8} \text{ là số tự nhiên.}$$

$$\text{d. Tính } x+y \text{ biết } (x+\sqrt{x^2+2019})(y+\sqrt{y^2+2019}) = 2019.$$

$$\text{e. Cho các số thực } x, y \text{ thỏa mãn: } (x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1}) = 1. \text{ Tính giá trị của } x+y.$$

Lời giải:

$$\text{a. Dễ thấy } A < 0,$$

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cách 1: Ta có

$$A^2 = \left(\sqrt{8-4\sqrt{3}} - \sqrt{8+4\sqrt{3}} \right)^2 = 8 - 4\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{8-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{8+4\sqrt{3}} = 16 - 2 \cdot 4 = 8$$

Suy ra $A = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$.

Cách 2: Ta viết lại

$$A = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{6}-\sqrt{2}| - |\sqrt{6}+\sqrt{2}| = \sqrt{6}-\sqrt{2} - \sqrt{6}-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

b. Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \right) \left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \right)$$

$$\text{Hay } B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{1-\frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (B-1)(B^2+B+2) = 0 \text{ mà } B^2+B+2 = \left(B+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B=1. \text{ Vậy } B \text{ là số nguyên.}$$

c. Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

$$\text{Ta có } x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2a) = 0 \quad (1)$$

Xét đa thức bậc hai x^2+x+2a với $\Delta = 1-8a \geq 0$

$$+ \text{ Khi } a = \frac{1}{8} \text{ ta có } x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1.$$

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1-8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x=1$. Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Ta có: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1$ là số tự nhiên.

d. Nhận xét: $(\sqrt{x^2 + 2019} + x)(\sqrt{x^2 + 2019} - x) = x^2 + 2019 - x^2 = 2019$.

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2 + 2019} - x = \sqrt{y^2 + 2019} + y$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2019} + y + \sqrt{x^2 + 2019} + x = \sqrt{x^2 + 2019} - x + \sqrt{y^2 + 2019} - y \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Tổng quát ta có: $(\sqrt{x^2 + a} + x)(\sqrt{y^2 + a} + y) = a$ thì $x + y = 0$.

e. Nhân 2 vế đẳng thức với: $(x - \sqrt{1+y^2})(y - \sqrt{1-x^2})$ ta có:

$$(x + \sqrt{y^2 + 1})(x - \sqrt{1+y^2})(y - \sqrt{1-x^2})(y + \sqrt{x^2 + 1}) = (x - \sqrt{1+y^2})(y - \sqrt{1-x^2}).$$

$$(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) = xy - x\sqrt{1+x^2} - y\sqrt{1+y^2} + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) = 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - (x + \sqrt{1+y^2})(y + \sqrt{1+x^2}).$$

$$\Leftrightarrow 1 - (x^2 - y^2)^2 = 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1 \Leftrightarrow 2(1 - xy) = (x^2 - y^2)^2 + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$\text{Hay } 2(1 - xy) = (x^2 - y^2)^2 + 2\sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} \Rightarrow (1 - xy) \geq \sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} \geq |xy-1|$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$ hay $x + y = 0$.

Ví dụ 3.

a. Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}.$$

b. Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Trường PTC Ngoại ngữ - ĐHQG Hà Nội năm 2015 – 2016).

c. Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$.

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Lời giải:

a. Ta có: $x^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5} + 1. \text{ Từ đó suy ra } (x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 4.$$

Ta biến đổi: $P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$

b. Ta có $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945$$

c. Để ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \text{ Khi đó ta có: } (\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Ta biến đổi: $P = x^3 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016.$

Ví dụ 4.

a. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}.$$

b. Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$.

c. Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$.

d. Giả sử (x, y) là các số thực thỏa mãn $(x + \sqrt{3+x^2})(y + \sqrt{3+y^2}) = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$.

e. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $P = \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-x^2}$.

Lời giải:

a. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

b. Ta viết lại giải thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6$.

Áp dụng bất đẳng thức: $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6. \text{ Suy ra } VT \leq VP.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \sqrt{2}.$$

c. $a\sqrt{x-4}, b = \sqrt{y-4}$ với $a, b \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành:

$2(a^2+4)b + 2(b^2+4)a = (a^2+4)(b^2+4)$. Chia 2 vế cho $(a^2+4)(b^2+4)$ thì phương trình trở thành

$$\frac{2b}{b^2+4} + \frac{2a}{a^2+4} = 1. \text{ Để ý rằng } a = 0 \text{ hoặc } b = 0 \text{ không thỏa mãn phương trình.}$$

Xét $a, b > 0$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có: $b^2 + 4 \geq 2\sqrt{4b^2} = 4b$. $a^2 + 4 \geq 4a$. Suy ra

8. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\sqrt{T} \leq \frac{2a}{4a} + \frac{2b}{4b} = 1, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 8. \text{ Vậy}$$

$x = 8, y = 8$ là nghiệm của phương trình.

d. Đặt $a = x + \sqrt{3+x^2} > 0 \Rightarrow a - x = \sqrt{3+x^2} \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 - 3}{2a}$.

Tương tự đặt $b = y + \sqrt{3+y^2} > 0 \Rightarrow x = \frac{b^2 - 3}{2b}$. Khi đó $x + y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{3}{2a} - \frac{3}{2b}$.

Theo giả thiết ta có: $ab = 9 \Rightarrow x + y = \frac{a}{2} + \frac{9}{2a} - \frac{3}{2a} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3} + \frac{3}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a}} = 2$. Lại có

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 3. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1. \text{ Vậy } (x^2 + xy + y^2)_{\min} = 3.$$

e. Đặt $a = \sqrt[4]{1+x}, b = \sqrt[4]{1-x} \Rightarrow a, b \geq 0, a^4 + b^4 = 2$. Ta có:

$P = a + b + ab$. Áp dụng bất đẳng thức ở (***) ta có

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \geq \left[\frac{1}{2}(a+b)^2 \right]^2 = \frac{(a+b)^4}{4} \Rightarrow (a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) = 16 \Leftrightarrow a + b \leq 2.$$

Suy ra $P \leq a + b + \frac{(a+b)^2}{4} \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta cũng có: $a^4 + b^4 \leq a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \leq (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \sqrt{2}$, mà

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \text{ với mọi } a, b \geq 0. \text{ Suy ra } a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2}. \text{ Vậy}$$

$$P = a + b + ab \geq a + b \geq \sqrt{2}. \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = 0 \text{ hoặc } b = 0 \text{ tức là } x = 1 \text{ hoặc } x = -1$$

Ví dụ 5.

Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

a. Tính giá trị biểu thức: $P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

b. Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$.

Lời giải:

a. Để ý rằng: $1+x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$

Tương tự đối với $1+y^2; 1+z^2$ ta có

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Suy ra $P = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$.

b. Tương tự như câu a)

Ta có: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(z+y)(z+x)}$

$$= \frac{x(y+z) + y(z+x) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$$

Ví dụ 6.

a. Tìm x_1, x_2, \dots, x_n thỏa mãn: $\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

b. Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$.

Lời giải:

a. Đẳng thức tương đương với: $(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1)^2 (\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2)^2 + \dots + (\sqrt{x_n^2 - n^2} - n)^2 = 0$

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2.2^2, \dots, x_n = 2.n^2$

10. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b. Đặt $x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

Suy ra $f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}(x^3 - y^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3})$. Áp dụng vào bài

toán ta có: $f(1) + f(2) + \dots + f(40) = \frac{1}{2}[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})]$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}) = 364.$$

Ví dụ 7.

a. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Tính giá trị biểu thức sau theo n .

$$P = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2}}$$

b. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Lời giải:

a. Với mọi số thực a, b, c khác 0 sao cho: $a + b + c = 0$ thì

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(-3)^2} = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

Áp dụng lần lượt với các số hạng còn lại ta được:

$$P = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(1 + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}.$$

b. Đặt

$$x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 2 \Rightarrow 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2$$

Suy ra $xy + yz + zx = 1$. dẫn đến $1 + a = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$, tương tự

$$1 + b = (y + z)(y + z), 1 + c = (z + x)(z + y) \text{ suy ra}$$

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+z)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} = \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}} \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Dạng 2: Các câu hỏi liên quan giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức đại số.

Phương pháp: Để giải quyết các bài tập dạng này ta cần chú ý các tính chất cơ bản:

Với số thực $A, B \geq 0$ thì.

$$+ \sqrt{A} \geq 0.$$

$$+ A + B \geq 2\sqrt{A.B} \text{ (Bất đẳng thức AM - GM). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } A = B.$$

$$+ \sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{C^2 + D^2} \geq \sqrt{(A+C)^2 + (B+D)^2} \text{ với các số thực } A, B, C, D \geq 0.$$

$$+ (A+B)^2 \leq 2(A^2 + B^2), (A+B)^3 \leq 4(A^3 + B^3) \text{ với } A, B \geq 0.$$

Ví dụ 1.

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}}$.

12. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \frac{a}{\sqrt{a-1}} + \frac{b}{\sqrt{b-2}} + \frac{c}{\sqrt{c-3}}$ với các số thực a, b, c thỏa mãn

$$a > 1, b > 4, c > 9.$$

d. Cho $x \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$.

e. Cho số thực x thỏa mãn: $0 \leq x \leq 5$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của:

$$P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}$$

f. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x\left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$.

g. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $G = \sqrt{5x-x^2} + \sqrt{18-3x-x^2}$.

Lời giải:

a. Điều kiện $x \geq 0$, ta viết lại $A = \frac{2(\sqrt{x+1})-1}{\sqrt{x+1}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$ dẫn đến $A \geq 2-1=1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ khi đó

giá trị nhỏ nhất của A là 1.

b. Điều kiện $x \geq 0$. Ta viết lại $B = \frac{(\sqrt{x+1})^2 + 4}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}}$, vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x+1} \geq 1$, áp

dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $A+B \geq 2\sqrt{A \cdot B}$ với các số thực không âm A, B ta có:

$$\sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x+1}\right) \cdot \frac{4}{\left(\sqrt{x+1}\right)}} = 4, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$\sqrt{x+1} = \frac{4}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 4 tại $x = 1$.

c. Ta có $\frac{a}{\sqrt{a-1}} = \frac{a-1+1}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1} + \frac{1}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1} + \frac{1}{\sqrt{a-1}} + 2$. do $a > 1$ nên $\sqrt{a-1} > 0$, áp dụng

bất đẳng thức $AM - GM$ cho 2 số thực dương ta có: $\sqrt{a-1} + \frac{1}{\sqrt{a-1}} \geq 2$ suy ra $\frac{a}{\sqrt{a-1}} \geq 4$. dấu bất

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a-1} = \frac{1}{\sqrt{a-1}} \Leftrightarrow \sqrt{a-1} = 1 \Leftrightarrow a = 4$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{\sqrt{b-2}} = \frac{b-4+4}{\sqrt{b-2}} = \sqrt{b-2} + \frac{4}{\sqrt{b-2}} + 4 \geq 8$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$b = 16$;

$\frac{c}{\sqrt{c-3}} = \frac{c-9+9}{\sqrt{c-3}} = \sqrt{c-3} + \frac{9}{\sqrt{c-3}} + 6 \geq 12$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$c = 36$,

Từ đó suy ra $C \geq 24$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4, b = 16, c = 36$.

Hay GTNN của C là 24 tại $x = 4, b = 16, c = 36$.

d. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Ta viết lại $D = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$, do $x \geq 0$

suy ra $\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \geq 1$. ta có $(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} = 1 + 2\sqrt{x(1-x)} \geq 1$ suy ra

$D \geq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

e. Đặt $\sqrt{8-x} = a, \sqrt{x+3} = b$ do $0 \leq x \leq 5$ suy ra $\begin{cases} \sqrt{3} \leq a, b \leq \sqrt{8} \\ a^2 + b^2 = 11 \end{cases}$.

Biểu thức P có dạng $P = (a^2 - 3)b + (b^2 - 3)a = ab(a+b) - 3(a+b)$

Đặt $a+b = t$ từ giả thiết ta có: $(a+b)^2 - 2ab = 11 \Leftrightarrow 4ab = 2t^2 - 22 \leq (a+b)^2 = t^2 \Rightarrow t \leq \sqrt{22}$.

Mặt khác ta cũng có:

$$\begin{cases} (a-\sqrt{3})(a-\sqrt{8}) \leq 0 \\ (b-\sqrt{3})(b-\sqrt{8}) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{8})a + \sqrt{24} \leq 0 \\ b^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{8})b + \sqrt{24} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 11 + 2\sqrt{24} \leq (\sqrt{3} + \sqrt{8})(a+b)$$

Hay $a+b \geq 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Vậy $2\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{22}$

14. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Ta có: $2P = 2ab(a+b) - 6(a+b) = (t^2 - 11)t - 6t = t(t^2 - 17)$. Từ đó ta có:

$$2P \geq (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \left[(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 17 \right] = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})(4\sqrt{6} - 6) = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow P \geq 5\sqrt{3}, \text{ dấu đẳng thức}$$

xảy ra khi và chỉ khi $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{8}$ hoặc $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 5$.

Ta có: $2P \leq 5\sqrt{22} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{\frac{11}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Cách khác:

Ta có: $0 \leq x \leq 5$ thì $P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3} \geq x\sqrt{3} + (5-x)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 5$.

Ta cũng có:

$$P^2 = \left[x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3} \right]^2 = x^2(8-x) + (5-x)^2(x+3) + 2x(5-x)\sqrt{(8-x)(x+3)}$$

Hay $P^2 = 75 + (5x - x^2) \left(2\sqrt{(8-x)(x+3)} - 1 \right)$. Theo bất đẳng thức *AM - GM* ta có

$$5x - x^2 = x(5-x) \leq \frac{(x+5-x)^2}{4} = \frac{25}{4} \cdot 2\sqrt{(8-x)(x+3)} \leq 8-x+x+3=11 \text{ nên:}$$

$$P^2 \leq 75 + \frac{25}{4} \cdot 10 = \frac{275}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}. \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 8-x = x+3 \text{ và } x = 5-x$$

hay $x = \frac{5}{2}$. Vậy GTNN của P là $5\sqrt{3}$. GTLN của P là $\frac{5\sqrt{22}}{2}$.

f. Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x+4)^2}} = \frac{x \left(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{|x-4|}$$

$$= \frac{x \left(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4} - 2 < 0$ nên $A = \frac{x(\sqrt{x-4} + 2 + 2 - \sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4} - 2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (Theo bất đẳng thức}$$

$AM - GM$). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

g. Điều kiện: $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 0 \\ 18 + 3x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ (x+3)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5$.

Ta viết lại $G = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{5x - x^2 + 18 - 2x}$. do $5x - x^2 \geq 0$ với mọi x thỏa mãn $0 \leq x \leq 5$ nên ta có $G \geq \sqrt{18 - 2x} \geq \sqrt{18 - 2 \cdot 10} = \sqrt{8}$. dấu đẳng thức xảy ra tại $x = 5$. Vậy GTNN của G bằng $2\sqrt{2}$ tại $x = 5$.

Ví dụ 2.

a. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$.

b. Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x+9}}$.

c. Tìm giá trị lớn nhất của $C = \frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x+11}}$.

d. Tìm giá trị lớn nhất của $D = \sqrt{9-x} + \sqrt{x}$.

e. Tìm giá trị lớn nhất của $E = -x^2 + 4\sqrt{(9-x)(1+3x)}$.

f. Tìm giá trị lớn nhất của $F = \sqrt{5x-x^2} + \sqrt{18+3x-x^2}$.

16. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Lời giải:

a. Điều kiện: $x \geq 0$ ta viết lại A thành: $A = \frac{\frac{1}{2}(2\sqrt{x}+1) + \frac{1}{2}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\sqrt{x}+1)}$. Vì $x \geq 0$ nên

$2\sqrt{x}+1 \geq 1$ suy ra $\frac{1}{2(2\sqrt{x}+1)} \leq \frac{1}{2}$ dẫn đến $A \leq 1$. dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$. Vậy

GTNN của A bằng 1 tại $x=0$.

b. Điều kiện: $x \geq 0$ ta có $x-2\sqrt{x}+9 = (\sqrt{x}-1)^2 + 8 > 0$ suy ra $B \geq 0$

+ Khi $x=0$ thì $B=0$ (1)

+ Khi $x > 0$ thì $B > 0$ ta có $\frac{1}{B} = \frac{x-2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}-2 + \frac{9}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} - 2$, áp dụng bất đẳng thức

AM-GM cho các số thực dương ta có: $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9} = 6$ suy ra $\frac{1}{B} \geq 4 \Rightarrow B \leq \frac{1}{4}$. dấu đẳng thức

xảy ra khi và chỉ khi $x=9$ (2)

Kết hợp (1),(2) ta suy ra GTLN của B bằng $\frac{1}{4}$ tại $x=9$.

Chú ý: Học sinh hay mắc sai lầm khi đưa về $\frac{1}{B}$ mà không xét $x=0$. (Biểu thức $\frac{1}{B}$ chỉ xác định khi $x > 0$).

c. Điều kiện $x \geq 0$ chú ý: $x-3\sqrt{x}+11 = \left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0$,

nếu $x \leq 1$ thì $C \leq 0$ (3)

Xét $x > 1$ khi đó $C > 0$ ta có: $\frac{1}{C} = \frac{x-3\sqrt{x}+11}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}-1) + 9}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}-1} - 1$,

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có: $\sqrt{x-1} + \frac{9}{\sqrt{x-1}} \geq 6$ suy ra

$$\frac{1}{C} \geq 5 \Rightarrow C \leq \frac{1}{5}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x-1} = \frac{9}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (4).}$$

Kết hợp (3),(4) ta suy ra GTLN của C bằng $\frac{1}{5}$ tại $x = 16$.

d. Điều kiện $0 \leq x \leq 9$. Ta có $D^2 = 9 + 2\sqrt{x(9-x)}$ theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$2\sqrt{x(9-x)} \leq x + 9 - x = 9 \text{ nên } D^2 \leq 18 \Leftrightarrow D \leq 3\sqrt{2}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$x = 9 - x \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}. \text{ Vậy GTLN của } D \text{ bằng } 3\sqrt{2} \text{ tại } x = \frac{9}{2}.$$

e. Điều kiện $(9-x)(1+3x) \geq 0 \Leftrightarrow (3x-27)(3x+1) \leq 0$ do $3x-27 < 3x+1$ nên suy ra E xác định

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 3x-27 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 9.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $2\sqrt{(1+3x)(9-x)} \leq 1+3x+9-x = 10+2x$ suy ra

$$E \leq -x^2 + 2(10+2x) = 20 + 4x - x^2 = 24 - (x-2)^2 \leq 24, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 2.$$

Vậy GTLN của E bằng 24 khi $x = 2$.

$$\text{f. Điều kiện: } \begin{cases} 5x - x^2 \geq 0 \\ 18 + 3x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ (x+3)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5.$$

Ta viết lại $F = \sqrt{x(5-x)} + \sqrt{(6-x)(x+3)}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng

$$(AX + BY)^2 \leq (A^2 + B^2)(X^2 + Y^2) \text{ ta có } P^2 \leq (x+6-x)(5-x+x+3) = 48 \Rightarrow P \leq 4\sqrt{3}, \text{ dấu đẳng}$$

$$\text{thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x}{5-x} = \frac{6-x}{x+3} \Leftrightarrow x = \frac{15}{7}.$$

Dạng 3: Tìm điều kiện để biểu thức nhận giá trị nguyên.

Phương pháp:

18. Đường tụy gán không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số nguyên, C nhận giá trị nguyên hoặc vô tỷ thì P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi C là số nguyên và C là ước số của B .

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số hữu tỷ, C nhận giá trị thực. Ta thường tìm cách đánh giá P , tức là chặn P theo kiểu $M \leq P \leq N$ từ đó suy ra các giá trị có thể của P . Hoặc ta tìm điều kiện của P để tồn tại biến x, y, \dots thỏa mãn yêu cầu bài toán từ đó suy ra các giá trị nguyên có thể của P .

+ Đối với các bài toán tổng hợp học sinh cần chú ý điều kiện ban đầu để loại các giá trị không thỏa mãn.

Ví dụ 1.

a. Tìm các giá trị nguyên của x để $P = \frac{2\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}}$ là số nguyên.

b. Tìm tất cả các số thực x để $P = \frac{2}{x - \sqrt{x+1}}$ là số nguyên.

c. Chứng minh: Không tồn tại giá trị thực của x để $P = \frac{3\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+2}}$ là số nguyên

Lời giải:

a. Điều kiện $x \geq 0$. Ta viết lại $P = \frac{2(\sqrt{x+1})+3}{\sqrt{x+1}} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x+1}}$. Do x là số nguyên nên $\sqrt{x+1}$ nhận

giá trị nguyên hoặc vô tỷ. Suy ra P là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x+1}$ là số nguyên và $\sqrt{x+1}$ là ước của 3. Chú ý $\sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \in \{1, 3\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{0, 2\} \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$.

Vậy $x \in \{0, 4\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

b. Điều kiện $x \geq 0$.

Do $x \geq 0$ nên $x - \sqrt{x+1} \geq \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ suy ra $P > 0$ ta có

$$P = \frac{2}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} < \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}, \text{ như vậy } 0 < P < \frac{8}{3}. \text{ Vì } P \text{ là số nguyên nên } P \text{ có thể}$$

nhận các giá trị $P \in \{1; 2\}$.

$$\text{TH1: } P=1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{cases} \text{ do}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{TH2: } P=2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy $x \in \left\{0; 1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

c. Điều kiện $x \geq 0$. dễ thấy P là số dương. Để ý rằng: $P = \frac{3\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} < \frac{3\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} = 3$ suy ra $0 < P < 3$

vì P là số nguyên nên P có thể nhận các giá trị là 1 hoặc 2.

$$\text{TH1: } P=1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}+5 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = -3 \text{ vô lý.}$$

$$\text{TH2: } P=2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}+5 = 2(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ vô lý.}$$

Vậy không tồn tại x để P là số nguyên.

Cách khác: Giả sử tồn tại giá trị $x \geq 0$ để $P = \frac{3\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$ là số nguyên. Khi đó ta có:

$$P = \frac{3\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow P\sqrt{x}+2P = 3\sqrt{x}+5 \Leftrightarrow \sqrt{x}(P-3) = 5-2P \quad (*)$$

Nếu $P=3$ thì (*) thì có dạng $0 = -1$ vô lý, vậy $P \neq 3$. Từ (*) ta cũng suy ra $\sqrt{x} = \frac{5-2P}{P-3}$, do $x \geq 0$

ta suy ra P phải thỏa mãn $\frac{5-2P}{P-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2P-5}{P-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2P-5}{2P-6} \leq 0$, để ý rằng $2P-5 > 2P-6$ nên

20. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

điều kiện $\frac{2P-5}{2P-6} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2P-5 \geq 0 \\ 2P-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq P < 3$ (**), do P là số nguyên nên (**) không thể xảy

ra. Tóm lại P không thể nhận giá trị nguyên.

Dạng 4: Bài toán tổng hợp

Bài 1. Cho $A = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}} (x \geq 0)$, $B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$.

a. Chứng minh khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $A = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}$.

b. Rút gọn B và tìm x để $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}}$.

Lời giải:

a. Ta có $x = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$ thay vào A ta có:

$$A = \frac{3+2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1+2} = \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3} = \frac{(2\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}.$$

b. Ta có:

$$B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)} - \frac{(2\sqrt{x}+1)(4x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$= \left(\frac{4x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{4x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = 4 : \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{4(2x-1)}{2x+1}$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}} : \frac{4(2x-1)}{2x+1} = \frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)}$, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}} \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{2x+1}{(\sqrt{x}+2)(2x-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 0 \text{ hay } x=2 \text{ hoặc}$$

$$\frac{2x+1}{(\sqrt{x+2})(2x-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} (*). \text{ Ta có } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x}(2x+1) = (\sqrt{x+2})(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đổi chiều với điều kiện bài toán ta thấy $x=1, x=2$ thỏa mãn.

Bài 2. Cho biểu thức: $A = \frac{x+9}{x-4}; B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a. Rút gọn biểu thức B .

b. Đặt $P = A : B$. Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{36}$.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải:

$$a. B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})}$$

$$\Leftrightarrow P = A : B = \frac{x+9}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} : \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{x+9}{6\sqrt{x}}$$

$$b. \text{ Khi } x = \frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{6} \text{ ta có } P = \frac{\frac{1}{36} + 9}{6 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{325}{36}.$$

$$c. P = \frac{x+9}{6\sqrt{x}} = \frac{1}{6} \left(\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \right). \text{ Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: } \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 6. \text{ Suy ra } P \geq 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$. Vật GTNN của P là 1 tại $x = 9$.

Bài 3. Cho $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x+6}}, B = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

22. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a. Rút gọn A.

b. Tính giá trị của A khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

c. Đặt $P = \frac{A}{B}$, tìm x để $P \leq 4$.

Lời giải:

$$\text{a. Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

$$\text{b. Khi } x = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 + \sqrt{3} \text{ thì } A = \frac{1}{2 + \sqrt{3} - 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{c. Ta có } P = \frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-4(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \leq 0$$

$$\text{Hay } \frac{3(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \geq 0 \quad (*).$$

$$\text{TH 1: } \begin{cases} \sqrt{x}-3 \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 9 \text{ đối chiếu với điều kiện suy ra } x > 9.$$

$$\text{TH 2: } \begin{cases} \sqrt{x}-3 \leq 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow x < 4 \text{ đối chiếu với điều kiện suy ra } 0 \leq x < 4.$$

Vậy $P \leq 4$ khi và chỉ khi $0 \leq x < 4$ hoặc $x > 9$.

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$, $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}$ ($x > 0, x \neq 4$).

a. Rút gọn B .

b. Tìm x sao cho $C = B : A$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

a. Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} = \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}.$$

b. Ta có: $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ nên $C = B : A = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

Vì $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0$ ta có: $C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 0 < C < \frac{5}{2}$, kết hợp với điều kiện C là một số nguyên suy ra $C \in \{1; 2\}$.

+ Nếu $C = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Nếu $C = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy $x = \frac{1}{9}$ thì C nhận giá trị là nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a. Tìm x để $A = 2$.

b. Chứng tỏ $A \cdot B$ không phụ thuộc vào x .

c. Tìm x để $A \geq B$.

Lời giải:

a. Ta có $A=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$.

b. Ta có:
$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} - \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} = \frac{x-2\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}$$
$$= \frac{(\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \text{ suy ra } A.B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = 1.$$

c. Ta có

$$A \geq B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} > \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \geq 0.$$

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$ suy ra điều kiện là $(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy để $A \geq B$ thì điều kiện là: $x > 1$.

Bài 6. Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+3}}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tính giá trị của P biết $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải:

a. Ta có:
$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-3})} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-3})}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3+2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}.$$

b. Với $x=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2}-1$ thay vào P ta có: $P=\frac{11-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{11\sqrt{2}-4}{2}$.

c. Ta có: $P=\frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{9}=6 \Rightarrow P \geq 4. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$\sqrt{x}+1=\frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow x=4. \text{ Vậy GTNN của } P \text{ bằng } 4 \text{ khi } x=4.$$

Bài 7. Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-3}, B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-10}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq \frac{9}{16}$.

a. Tính giá trị của A khi $x=25$.

b. Rút gọn B .

c. Tìm x để $B=2A$.

Lời giải:

a. Khi $x=25$ thì $\sqrt{x}=5$ suy ra $A=\frac{5}{4 \cdot 5-3}=\frac{5}{17}$.

b. Ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-10}{x-4}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x+3\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\text{Hay } B=\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$$

26. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$c. B=2A \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+2}} = \frac{2\sqrt{x}}{4\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+5})(4\sqrt{x-3}) \Leftrightarrow 2x+13\sqrt{x}-15=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+15)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=-\frac{15}{2} \end{cases} \text{ do } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \text{ thỏa mãn hay } x=1.$$

Bài 8. Cho $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) + \frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x+2}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a. Rút gọn P .

b. Tính giá trị của P khi $x=4$.

c. Tìm các giá trị của x để P là số tự nhiên.

Lời giải:

a. Ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} \right) + \frac{9\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1})} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2})} + \frac{9\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1})} = \frac{2x+11\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1})}$$

$$\text{Hay } P = \frac{(\sqrt{x+2})(2\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1})} = \frac{2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x+1}}.$$

b. Với $x=4$ thì $\sqrt{x}=2$ suy ra $P = \frac{2 \cdot 2 + 7}{2+1} = \frac{11}{3}$.

c. Ta có $P = \frac{2(\sqrt{x}+1)+5}{\sqrt{x+1}} = 2 + \frac{5}{\sqrt{x+1}}$.

Do $x \geq 0$ nên $0 < \frac{5}{\sqrt{x+1}} \leq 5$ suy ra $2 < P \leq 7$. Vì P là số nguyên nên

$$P \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x+1}} \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \in \left\{ \frac{5}{5}; \frac{5}{4}; \frac{5}{3}; \frac{5}{2}; 1 \right\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{ 4; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ 16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0 \right\}.$$

Đổi chiều điều kiện ta thấy $x \in \left\{ 16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0 \right\}$ là các giá trị cần tìm.

Cách khác: Để P là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là: $\frac{5}{\sqrt{x+1}} = m$ (với m là số nguyên dương và $x \geq 0$).

Ta có: $\frac{5}{\sqrt{x+1}} = m \Leftrightarrow m\sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{5-m}{m}$. do $x \geq 0 \Rightarrow$ điều kiện $\frac{5-m}{m} \geq 0$, do

$$m > 0 \Rightarrow 5 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5 \text{ hay } 0 < m \leq 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \text{ suy ra } \sqrt{x+1} \in \left\{ 4; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; 0 \right\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ 16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0 \right\}.$$

Bài 9. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab-b}} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab-a}} \right) : \left(\frac{1}{b\sqrt{a}} - \frac{1}{a\sqrt{b}} \right)$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

a. Chứng minh rằng $P = \sqrt{ab}$.

b. Tính giá trị biểu thức P khi $a = 3 - \sqrt{5}$ và $b = 0,5$.

c. Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a^2 + 4b^2 = 8$.

Lời giải:

a. Ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{a}} \right) = \frac{a - (2\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\text{Hay } P = \frac{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{ab}.$$

b. Khi $a = 3 - \sqrt{5}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 \Rightarrow P = \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

c. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có: $a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot 4b^2} = 4ab \Rightarrow 4ab \leq 8 \Rightarrow ab \leq 2$. Vậy $P \leq \sqrt{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = 4b^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b = 1$.

Vậy GTLN của P là $\sqrt{2}$.

Bài 10. Cho 2 biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} + 1}, B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} - \frac{36}{x - 9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a. Rút gọn B , tìm x để $A = B$.

b. Tìm tất cả các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên dương.

Lời giải:

a. Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} - \frac{36}{x - 9} = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 3) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 3) - 36}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{12\sqrt{x} - 36}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{12}{\sqrt{x} + 3}$$

$$A = B \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x} + 3} = \frac{7\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow 12(2\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 3)(7\sqrt{x} - 2) \Leftrightarrow 7x - 5\sqrt{x} - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(7\sqrt{x} + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = -\frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMĐK)}.$$

b. Ta có: $\frac{7}{2} \frac{(2\sqrt{x} + 1) - 11}{(2\sqrt{x} + 1)} < \frac{7}{2} \frac{(2\sqrt{x} + 1)}{(2\sqrt{x} + 1)} < \frac{7}{2}$. Vì A là số nguyên dương nên ta có:

$$0 < A < \frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = 2 \\ A = 3 \end{cases}$$

TH1: $A = 1 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} + 1} = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{25}$ thỏa mãn điều kiện.

29. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{TH2: } A=2 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x+1}}=2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=\frac{16}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$\text{TH3: } A=3 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x+1}}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=5 \Leftrightarrow x=5 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Bài 11. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

a. Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P .

b. Tìm giá trị của x để $P = -\frac{4}{3}$.

c. Khi $x > 25$ hãy tìm GTNN của P .

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0; x \neq 9; x \neq 25$ (*).

a. Ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right]$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - 2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = -\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{5-\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-5}$$

b. $P = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-5} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x+4\sqrt{x}-20=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(3\sqrt{x}+10)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$ thỏa mãn (*).

c. Khi $x > 25$ thì $\sqrt{x}-5 > 0$. Ta có: $P = \frac{x}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x}+5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x}-5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} + 10$. Áp dụng

bất đẳng thức Cô si dạng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ta có: $\sqrt{x}-5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} \geq 2\sqrt{25} = 10$. Suy ra $P \geq 20$. Dấu

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}-5 = \frac{25}{\sqrt{x}-5} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-5)^2 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x}-5 = 5 \Leftrightarrow x=100$ thỏa mãn (*). Vậy GTNN của P là 20 khi $x=100$.

Bài 12. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right), B = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a. Rút gọn $P = A : B$.

b. Tìm các giá trị m để tồn tại x sao cho $P\sqrt{x} = m + \sqrt{x}$.

Lời giải:

a. Ta có $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$P = A : B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

b. Theo giả thiết ta có: $P\sqrt{x} = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow x-1 = m + \sqrt{x}$. Đặt $\sqrt{x} = t$. điều kiện $t > 0, t \neq 1$. Phương trình trở thành: $t^2 - t - m - 1 = 0$. Để phương trình có nghiệm điều kiện là

$$\Delta = 1 + 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}. \text{ Khi đó theo hệ thức Vi-et ta có: } t_1 + t_2 = 1 > 0 \text{ suy ra trong hai}$$

nghiệm tồn tại ít nhất 1 nghiệm dương. Như vậy ta chỉ cần tìm điều kiện để $t=1$ không phải là

nghiệm. Tức là: $1-1-m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Vậy điều kiện cần tìm là: $m \geq -\frac{5}{4}, m \neq -1$.

Bài 13. Cho biểu thức $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a. Rút gọn P .

b. Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c. Với giá trị nào của x thì $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$.

Lời giải:

a. Ta có:

$$P = \left[\frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \right] : \left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \right] = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}} : \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \right).$$

b. Ta có: $x = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2}$ nên $P = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x+1}}{8} - 1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{8} - 1 = \frac{16\sqrt{x} - (\sqrt{x+1})^2 - 8(\sqrt{x+1})}{8(\sqrt{x+1})} = \frac{-x + 6\sqrt{x} - 9}{8(\sqrt{x+1})} = -\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x+1})}$

Vì $(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0, \forall x > 0, x \neq 1$ nên $-\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x+1})} \geq 0$ suy ra $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x+1}}{8} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x+1}}{8} \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện đề bài ta suy ra $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x+1}}{8} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

Bài 14. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a. Rút gọn P .b. Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.c. Chứng minh: $P + \sqrt{x} > 3$.**Lời giải:**

a. Ta có $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \left[\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})} \right] \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

$$= \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

$$\text{b. } 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2x + 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

c. Ta có: $P + \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$. Theo bất đẳng thức Cô si dạng $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2 \text{ suy ra } P \geq 3. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1 \text{ không thỏa mãn}$$

điều kiện $x \neq 1$. Vậy $P > 3$ với mọi $x > 0, x \neq 1$.

Bài 15. Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$.

a. Rút gọn P .

b. So sánh P với 4.

c. Tìm x thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{x} \cdot (P-2) + x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\begin{aligned} \text{a. Ta có: } P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \right) \\ &= \frac{x-x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4-x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b. Ta có: $P - 4 = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow P \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

c. Tìm x thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{x} \cdot (P-2) + x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$.

Ta có: $\left[\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} - 2 \right] x\sqrt{x} + x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x(x^2 + 4)}$. Chia hai vế cho

$x^2 + 4 > 0$ ta thu được: $1 + \frac{2x}{x^2 + 4} = 3\sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$ với $t > 0$ ta có:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nếu $t=1, \sqrt{\frac{x}{x^2+4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$ vô nghiệm. Do $\Delta = -15 < 0$.

Nếu $t = \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{x}{x^2+4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2$ thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: $x=2$.

Bài 16. Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

a) Tính giá trị biểu thức: $P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

b) Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$

Lời giải:

a) Đề ý rằng: $1+x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$

Tương tự đối với $1+y^2; 1+z^2$ ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Suy ra $P = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$.

b) Tương tự như câu a)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(z+y)(z+x)} \\ &= \frac{x(y+z) + y(z+x) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}} \end{aligned}$$

Bài 17.

a) Tìm x_1, x_2, \dots, x_n thỏa mãn: $\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

b) Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$.

Lời giải:

a) Đẳng thức tương đương với: $(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1)^2 + (\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2)^2 + \dots + (\sqrt{x_n^2 - n^2} - n)^2 = 0$

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2 \cdot 2^2, \dots, x_n = 2 \cdot n^2$

$$\text{b) Đặt } x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

Suy ra $f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}(x^3 - y^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3})$. Áp dụng vào bài

$$\begin{aligned} \text{toán ta có: } f(1) + f(2) + \dots + f(40) &= \frac{1}{2}[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})] \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}) = 364 \end{aligned}$$

Bài 18.

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Chứng minh: $2\sqrt{n}-2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Lời giải:

a) Xét $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Dễ thấy $A > B$.

Ta có $A+B = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

Suy ra $A+B = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81}-\sqrt{80}) = \sqrt{81}-1 = 8$. Do $A > B$ suy ra

$2A > A+B = 8 \Leftrightarrow A > 4$.

b) Để ý rằng: $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} < \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$ với mọi k nguyên dương.

Suy ra $VT > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Đặt $P = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có: $\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Từ đó suy ra $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ hay

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

Do đó: $2\left[(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right] < T$ và

$T < 1 + 2\left[(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\right]$.

Hay $2\sqrt{n}-2 < T < 2\sqrt{n}-1$.

Bài 19.

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}.$$

b) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$.

Lời giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}.$$

b) Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6$.

Áp dụng bất đẳng thức: $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6. \text{ Suy ra } VT \leq VP. \text{ Dấu}$$

bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \sqrt{2}$$

Bài 20. Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x \left(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{|x-4|} = \frac{x \left(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên $A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \quad (\text{Theo bất đẳng thức Cô si}).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số

nguyên dương của 16. Hay $x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra

$x = 5$ hoặc $x = 6$

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$$A = \frac{2(m^2+4)}{m} = 2m + \frac{8}{m} \text{ suy ra } m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}.$$

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Bài 21. Hãy chứng tỏ rằng số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là một nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Lời giải:

Áp dụng hằng đẳng thức $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$, ta được

$$\begin{aligned}
 m^3 &= (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2).m} \\
 &= 4 - 3\sqrt[3]{1.m} = 4 - 3m.
 \end{aligned}$$

Suy ra: $m^3 + 3m - 4 = 0$.

Vậy m là một nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Bài 22. Cho $M = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$.

- Tìm các số nguyên a để M là số nguyên.
- Chứng minh rằng với $a = \frac{4}{9}$ thì M là số nguyên.
- Tìm các số hữu tỉ a để M là số nguyên.

Lời giải:

a) Ta có $M = 1 + \frac{5}{\sqrt{a} + 1}$. Để M là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{a} + 1}$ phải là số nguyên.

Ta biết rằng khi a là số nguyên thì \sqrt{a} hoặc là số nguyên (nếu a là số chính phương) hoặc là số vô tỉ (nếu a không là số chính phương). Để $\frac{5}{\sqrt{a} + 1}$ là số nguyên thì \sqrt{a} không thể là số vô tỉ, do đó \sqrt{a} là số nguyên, suy ra $\sqrt{a} + 1$ là ước tự nhiên của 5.

Ta có

$\sqrt{a} + 1$	1	5
\sqrt{a}	0	4
a	0	16
M	6	2

b) Với $a = \frac{4}{9}$ thì $M = \frac{\frac{2}{3} + 6}{\frac{2}{3} + 1} = 4$.

c) Ta có $M = 1 + \frac{5}{\sqrt{a} + 1}$. Để M là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{a} + 1}$ phải là số nguyên.

Đặt $\frac{5}{\sqrt{a} + 1} = n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$n\sqrt{a} + n = 5 \text{ do đó } \sqrt{a} = \frac{5 - n}{n} \text{ (do } n \neq 0).$$

Giải điều kiện $\frac{5-n}{n} \geq 0$, ta được $0 < n \leq 5$.

Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ta có

n	1	2	3	4	5
\sqrt{a}	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
a	16	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{16}$	0
M	2	3	4	5	6

III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG CÁC ĐỀ THI VÀO CHUYÊN

Bài 1. Cho biểu thức $P = (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011})$.

Tính giá trị biểu thức của P với $a = 4 + \sqrt{5}$ và $b = 4 - \sqrt{5}$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hà Nội, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn

Xét $a - 4 = \sqrt{5}$ bình phương hai vế ta được:

$$a^2 - 8a + 16 = 5 \Rightarrow a^2 - 8a + 11 = 0$$

Xét $b - 4 = -\sqrt{5}$ bình phương hai vế ta được:

$$b^2 - 8b + 16 = 5 \Rightarrow b^2 - 8b + 11 = 0.$$

$$P = a^{2011}(a^2 - 8a + 11) + b^{2011}(b^2 - 8b + 11)$$

$$\Rightarrow P = 0.$$

Bài 2. Cho $\frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$; $x \neq 0$ và $\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x} = a$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{9-4x^2}}}{x}$ theo a .

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } P = \frac{\sqrt{3+2x+2\sqrt{(3+2x)(3-2x)}+3-2x}}{x}$$

$$P = \frac{\sqrt{(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})^2}}{x} = \frac{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x}}{x}$$

$$P = \frac{(3+2x) - (3-2x)}{x(\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x})} = \frac{4x}{x(\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x})} = \frac{4}{a}.$$

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

$$\text{Với } x = \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - 1.$$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}, a > 0.$$

$$\text{Xét } a^2 = 4 + 2\sqrt{4 - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = 4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 4 + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - 1 = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow (x + 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Ta có: $A = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

$$A = 2x(x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 2x - 1) + 1 = 1.$$

Bài 4. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A = -6$.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn

a) TXĐ: $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$.

42. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$A = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \left(\frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \left(\frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \left(2 - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{b) } A = -6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x}-9 = -6(\sqrt{x}-2)$$

$7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy để $A = -6$ thì $x = 9$.

Bài 5. Rút gọn biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a-2}+2}{3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a-2}}{3+\sqrt{a-2}} + \frac{a+7}{11-a} \right) : \left(\frac{3\sqrt{a-2}+1}{a-3\sqrt{a-2}-2} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right)$$

Hướng dẫn

Đặt $\sqrt{a-2} = x$, biểu thức có dạng:

$$P = \left(\frac{x+2}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{3+x} + \frac{x^2+2+7}{11-(x^2+2)} \right) : \left(\frac{3x+1}{x^2-3x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$P = \frac{x+2}{3} \left(\frac{x}{3+x} + \frac{x^2+9}{9-x^2} \right) : \frac{3x+1-(x-3)}{x(x-3)}$$

$$P = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{x(3-x)+x^2+9}{(3+x)(3-x)} : \frac{2x+4}{x(x-3)}$$

$$P = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{3x+9}{(3+x)(3-x)} \cdot \frac{x(x-3)}{2(x+2)}$$

$$P = \frac{(x+2).3(x+3).x(x-3)}{3(3+x).(3-x)2(x+2)}$$

$$P = \frac{-x}{2}. \text{ Vậy } P = \frac{-\sqrt{a-2}}{2}.$$

Bài 6. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 100$.

Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 10} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{10\sqrt{z}}{\sqrt{xz} + 10\sqrt{z} + 10}$$

Hướng dẫn

Thay $10 = \sqrt{100} = \sqrt{xyz}$ vào biểu thức A , ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{xz} + \sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{xyz}}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} + 1 + \sqrt{yz})} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{zx} \cdot \sqrt{yz}}{\sqrt{zx}(1 + \sqrt{yz} + \sqrt{y})}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{y} + 1 + \sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{yz}}{1 + \sqrt{yz} + \sqrt{y}}$$

$$A = \frac{1 + \sqrt{y} + \sqrt{yz}}{\sqrt{y} + 1 + \sqrt{yz}} = 1.$$

Bài 7. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$ biết:

$$a = \sqrt[3]{55 + \sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55 - \sqrt{3024}}.$$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn

$$\text{Xét } a^3 = 55 + \sqrt{3024} + 55 - \sqrt{3024} + 3\sqrt{(55 + \sqrt{3024})(55 - \sqrt{3024})}. a$$

44. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$a^3 = 110 + 3\sqrt[3]{3025 - 3024} \cdot a \Leftrightarrow a^3 - 3a - 110 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 125 - 3a + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-5)(a^2 + 5a + 25) - 3(a-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-5)(a^2 + 5a + 22) = 0$$

Nhận xét: $a^2 + 5a + 22 = \left(a + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{63}{4} > 0$ nên $a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5$

Từ đó suy ra $P = \frac{5^3 - 3 \cdot 5 + 2}{5^3 - 4 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 - 2} = \frac{112}{48} = \frac{7}{3}$

$$P = \frac{9\sqrt{10} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - \sqrt{10} - 9\sqrt{10} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} + \sqrt{10}}{45 - 1}$$

$$P = \frac{24\sqrt{2}}{44} = \frac{6\sqrt{2}}{11}$$

Bài 8. Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \sqrt{175} - 2\sqrt{2}$;

b) $B = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{8 - 7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2} = \sqrt{8} - \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$.

$$A = 4\sqrt{7}$$

b) $B = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{9-12\sqrt{2}+8}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{9+12\sqrt{2}+8}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})^2}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^2}}$

$$B = \sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{1}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}} - \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2.$$

Bài 9. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn

Ta có:

$$B = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{6})}{4-6} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{6})+\sqrt{3}(2-\sqrt{6})}{4-6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot 4}{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{-\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{2}}{-6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{2} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2-\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 0.$$

Bài 10. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

b) $T = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$

Hướng dẫn

a) Ta có: $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-(2+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-(2-\sqrt{3})}$

$$A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

b) Ta có: $T = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} + \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}$

$$S = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$$

$$S = 4.$$

Bài 11. Cho $A = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{2(3+\sqrt{5})}}$ và $B = \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}$. Tính $A^3 - B^3$.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Gia Lai, năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn

Ta có: $A = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}+1} = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5}$

$$A = \frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{20} = \frac{10+2\sqrt{5}}{20} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

Ta có: $B = \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2(3-\sqrt{5})}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4-(\sqrt{5}-1)} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5}$

$$B = \frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{20} = \frac{10-2\sqrt{5}}{20} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Suy ra: $A-B = \frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $A \cdot B = \frac{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{10 \cdot 10} = \frac{1}{5}$.

Ta có: $A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB(A-B) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{25}$.

Bài 12. Xác định a, b biết: $\frac{13}{3\sqrt{7}+\sqrt{11}} + \frac{17}{4\sqrt{7}+2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{Xét vế trái: } & \frac{13(3\sqrt{7}-\sqrt{11})}{9 \cdot 7 - 11} + \frac{17 \cdot (4\sqrt{7}-2\sqrt{11})}{16 \cdot 7 - 4 \cdot 11} \\ &= \frac{13(3\sqrt{7}-\sqrt{11})}{52} + \frac{17(4\sqrt{7}-2\sqrt{11})}{4 \cdot 17} \\ &= \frac{3\sqrt{7}-\sqrt{11}}{4} + \frac{4\sqrt{7}-2\sqrt{11}}{4} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt{7} - \frac{3}{4} \cdot \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Đồng nhất hai vế ta được: $a = \frac{7}{4}; b = -\frac{3}{4}$.

Bài 13. Cho $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$. Với $|x| < 1; x \neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{x-1}{x+1} = 12\sqrt{2} - 17$.

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{1+x-(1-x)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{2x} = \sqrt{2}$$

ĐKXD: $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \cdot x - 1.$$

Bình phương hai vế, ta được: $1-x^2 = 2x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$.

Vì $x \neq 0$ nên $3x - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{Xét } \frac{x-1}{x+1} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}-1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}+1} = \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}+3} = \frac{(2\sqrt{2}-3)^2}{8-9} = \frac{8-12\sqrt{2}+9}{-1} = 12\sqrt{2}-17.$$

48. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Điều phải chứng minh.

Bài 14. Tính giá trị biểu thức $M = x^5 - 6x^3 + x$ tại $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}$.

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } x = \frac{(3 + \sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1)}{8 - 1} = \frac{7\sqrt{2} + 7}{7} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } x^3 = x \cdot x^2 = (\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} + 7$$

$$x^5 = x^2 \cdot x^3 = (3 + 2\sqrt{2})(5\sqrt{2} + 7) = 29\sqrt{2} + 41$$

Thay vào biểu thức M ta có:

$$M = 29\sqrt{2} + 41 - 6(5\sqrt{2} + 7) + \sqrt{2} + 1 \Rightarrow M = 0.$$

Bài 15. Cho biểu thức: $M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

a) Rút gọn M ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của M .

Hướng dẫn

a) Ta có: $M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{3 + (2\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{3}{3 + (2\sqrt{x} - 1)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$$M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{3 + 4x + 4\sqrt{x} + 1} + \frac{3}{3 + 4x - 4\sqrt{x} + 1} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{4x + 4\sqrt{x} + 4} + \frac{3}{4x - 4\sqrt{x} + 4} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

49. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 1 + x + \sqrt{x} + 1}{(x + 1)^2 - x} \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{2020}{x^2 + x + 1}. \text{ TXĐ: } x \geq 0.$$

b) Ta có: $x^2 + x + 1 \geq 1$. Vì $x \geq 0$

$$\text{nên } M = \frac{2020}{x^2 + x + 1} \leq \frac{2020}{1} = 2020.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 2020 khi $x = 0$.

Bài 16. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{3x - 6\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 4$)

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $A = 2\sqrt{x} - 1$.

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên, ĐHSP, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{2(2\sqrt{x} + 1) + 3(\sqrt{x} - 2) - 5\sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3x - 6\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 3}$$

$$A = \frac{4\sqrt{x} + 2 + 3\sqrt{x} - 6 - 5\sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{b) } A = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow (2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1) = 3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(4\sqrt{x}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1, \text{ thuộc tập xác định.}$$

Vậy với $x=1$ thì $A = 2\sqrt{x}-1$.

Bài 17. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 4$.

$$\text{Đặt: } P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}. \text{ Tính } \sqrt{P}.$$

Hướng dẫn

Thay $2 = \sqrt{4} = \sqrt{xyz}$ vào biểu thức P , ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{zx} + \sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{xyz}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} + 1 + \sqrt{yz})} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{zx} \cdot \sqrt{yz}}{\sqrt{zx}(1 + \sqrt{yz} + \sqrt{y})}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{y} + 1 + \sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + 1} + \frac{\sqrt{yz}}{1 + \sqrt{yz} + \sqrt{y}}$$

$$P = \frac{1 + \sqrt{y} + \sqrt{yz}}{\sqrt{y} + 1 + \sqrt{yz}} = 1 \Rightarrow \sqrt{P} = 1.$$

Bài 18. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1} + \frac{\sqrt{n+1}+3}{\sqrt{n+1}-3} - \frac{n-\sqrt{n+1}+7}{n-2\sqrt{n+1}-2}$ với $n \in \mathbb{N}; n \neq 8$.

a) Rút gọn biểu thức: $Q = \frac{P}{n+3\sqrt{n+1}+1}$ với $n \in \mathbb{N}; n \neq 8$.

b) Tìm tất cả các giá trị $n (n \in \mathbb{N}; n \neq 8)$ sao cho P là số nguyên tố.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Đà Nẵng, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn

Đặt $\sqrt{n+1} = x$ khi đó biểu thức P có dạng:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+3}{x-3} + \frac{x^2-x+6}{x^2-2x-3} \\ &= \frac{(x-1)(x-3) + (x+1)(x+3) - x^2 + x - 6}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3 + x^2 + 4x + 3 - x^2 + x - 6}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 + x}{(x+1)(x-3)} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x}{x-3}. \end{aligned}$$

a) Do đó $Q = \frac{x}{x-3} : (x^2+3x) = \frac{x}{x-3} \cdot \frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{x^2-9}$

Suy ra $Q = \frac{1}{n+1-9} = \frac{1}{n-8}$.

Theo câu a, ta có $P = \frac{x}{x-3}$ nên $P = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-3}$

$P = 1 + \frac{3}{\sqrt{n+1}-3}$, P là số nguyên tố nên P phải là số nguyên dương.

$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{n+1}-3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n+1}-3 \in U(3)$

$\sqrt{n+1}-3$	1	3
$\sqrt{n+1}$	4	6
n	15	35

Thử lại, với $n = 15$ thì $P = 4$ là hợp số (loại);

với $n = 35$ thì $P = 2$ là số nguyên tố (thỏa mãn)

Vậy với $n = 35$ thì $P = 2$ là số nguyên tố.

52. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Bài 19. Cho $x, y, z > 0$ và khác nhau đôi một. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào vị trí của các biến.

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}-\sqrt{y})}.$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } P = \frac{x(\sqrt{y}-\sqrt{z}) - y(\sqrt{x}-\sqrt{z}) + z(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})}$$

$$P = \frac{x(\sqrt{y}-\sqrt{z}) - y\sqrt{x} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} - z\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})}$$

$$P = \frac{x(\sqrt{y}-\sqrt{z}) + \sqrt{x}(z-y) + \sqrt{yz}(\sqrt{y}-\sqrt{z})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})}$$

$$P = \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})}$$

$\Rightarrow P = 1$. Vậy biểu thức P không phụ thuộc vào vị trí của các biến.

Bài 20. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$

Chứng minh rằng P luôn nhận giá trị nguyên với mọi x, y thỏa mãn điều kiện: $x > 0, y > 0$ và $x \neq y$.

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } P = \left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \right] \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(x-y)} \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y + x + 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}(x-y)} \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \frac{2(x+y)}{\sqrt{xy}(x-y)} \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y} = 2. \text{ Điều phải chứng minh.}$$

Bài 21. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+5}}{1-x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P khi $x = \frac{8}{3-\sqrt{5}}$.

c) Tìm x để P có giá trị là số tự nhiên.

d) Tìm x để $P < -1$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $P = \frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})} : \frac{3(\sqrt{x+1})-2\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}$

$$P = \frac{2x+1-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})} : \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}-2}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}. \text{ ĐKXD: } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4.$$

b) $x = \frac{8(3+\sqrt{5})}{9-5} = 6+2\sqrt{5} = (\sqrt{5}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5}+1$ thuộc TXĐ.

Thay vào biểu thức P , ta có:

54. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$P = \frac{\sqrt{5}+1+1}{\sqrt{5}+1-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{7+3\sqrt{5}}{4}.$$

c) Ta có: $P = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-2}$. Để P có giá trị là số tự nhiên thì $\sqrt{x}-2 \in U(3)$ và $x > 2$,

Từ đó ta có bảng giá trị sau:

$\sqrt{x}-2$	1	3
\sqrt{x}	3	5
x	9	25

Kết hợp với tập xác định, với $x \in \{9; 25\}$ thì P nhận giá trị là số tự nhiên.

$$d) P < -1 \Leftrightarrow P+1 < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$\Rightarrow 2\sqrt{x}-1$ và $\sqrt{x}-2$ khác dấu.

Mặt khác, ta có $\sqrt{x}-2 < \sqrt{x}-1 \leq 2\sqrt{x}-1$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \sqrt{x}-2 < 0 \\ 2\sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với tập xác định, ta có: $S = \left\{ x / \frac{1}{4} < x < 4 \right\}$ thì $P < -1$.

$$\text{Bài 22. Rút gọn biểu thức: } P = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 + \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$$

Với $x > 0, y > 0, x \neq y$.

Hướng dẫn

Ta có:

$$P = \frac{x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} - y\sqrt{y} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$P = \frac{3x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}(x - \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{3\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 3.$$

Bài 23. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + c = 2b$ thì ta luôn có:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết, suy ra $a - b = b - c$

$$\text{Xét vế trái: } \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b - c} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a - b}$$

$$= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a - \frac{a+c}{2}} = \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{a - c} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Vế trái = Vế phải. Điều phải chứng minh.

Bài 24. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn

Cách 1. Đặt $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}}$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

• Ta có: $A > B \Rightarrow 2A > A + B$

• Xét $A + B = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

$$\Leftrightarrow A + B = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{5-4} + \dots + \frac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{81-80}$$

$$\Leftrightarrow A + B = \sqrt{81} - \sqrt{1} = 8$$

Mà $2A > A + B \Rightarrow 2A > 8 \Rightarrow A > 4$. Điều phải chứng minh.

Cách 2. Ta có: $A > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$

$$\Rightarrow A > \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{3-1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5} + \dots + \frac{\sqrt{81}-\sqrt{79}}{81-79}$$

$$A > \frac{\sqrt{81}-\sqrt{1}}{2} = 4. \text{ Điều phải chứng minh.}$$

Bài 25. Cho dãy số $a_1; a_2; \dots; a_n$ thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \frac{\sqrt{3} + a_n}{1 - \sqrt{3}a_n}$ với $n = 1; 2; 3; \dots$. Tính a_{2020} .

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } a_{n+2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} + a_n}{1 - \sqrt{3}a_n}}{1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} + a_n}{1 - \sqrt{3}a_n}} = \frac{\sqrt{3} - 3a_n + \sqrt{3} + a_n}{1 - \sqrt{3}a_n - 3 - \sqrt{3}a_n}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{2\sqrt{3} - 2a_n}{-2 - 2\sqrt{3}a_n} = \frac{\sqrt{3} - a_n}{-1 - \sqrt{3}a_n}.$$

$$\text{Ta có: } a_{n+3} = \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} - a_n}{-1 - \sqrt{3}a_n}}{1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} - a_n}{-1 - \sqrt{3}a_n}} = \frac{-\sqrt{3} - 3a_n + \sqrt{3} - a_n}{-1 - \sqrt{3}a_n - 3 + \sqrt{3}a_n}$$

$$\Rightarrow a_{n+3} = \frac{-4a_n}{-4} = a_n.$$

Từ đó suy ra $a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{2020}$. Vậy $a_{2020} = 1$.

Bài 26. Cho số thực $a > 0$ thỏa mãn $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$. Chứng minh rằng: $a - \frac{1}{a} = \sqrt{5}$

Hướng dẫn

$$\text{Từ giả thiết } \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} = 1 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Nhận xét: Vì $\sqrt{a} > 0$ nên $\sqrt{a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ loại, suy ra $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

$$\text{Xét } a + \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} + 1}{2} = \sqrt{5}$$

Từ đó ta có: $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$. Điều phải chứng minh.

Bài 27.

a) Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn: $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$. Tính

$$P = \sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-x)(4-z)} + \sqrt{z(4-y)(4-x)} - \sqrt{xyz}.$$

b) Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}} = y \quad (n \text{ dấu căn}, n \geq 1).$$

Hướng dẫn

a) Ta có: $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4 \Leftrightarrow 4(x + y + z) + 4\sqrt{xyz} = 16$

Mặt khác:

58. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\begin{aligned}
x(4-y)(4-z) &= x[16-4(y+z)+yz] = x[4(x+y+z+4\sqrt{xyz}-4(y+z)+yz)] \\
&= x(4x+4\sqrt{xyz}+yz) = x(2\sqrt{x}+\sqrt{yz})^2 \\
\Rightarrow \sqrt{x(4-y)(4-z)} &= \sqrt{x}(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}) = 2x+\sqrt{xyz}.
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự

$$\sqrt{y(4-x)(4-z)} = 2y + \sqrt{xyz}.$$

$$\sqrt{z(4-x)(4-y)} = 2z + \sqrt{xyz}.$$

$$\Rightarrow P = 2x + 2y + 2z + 3\sqrt{xyz} - \sqrt{xyz}.$$

$$\Rightarrow P = 2(x + y + z + \sqrt{xyz}) = 8.$$

b) Nhận xét: $x + \sqrt{x}$ là số chính phương vì

$$\sqrt{x + \sqrt{x} + \dots + \sqrt{x}} = y \quad (n \text{ dấu căn}).$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x} + \dots + \sqrt{x}} = y^2 - x \quad (n-1 \text{ dấu căn}).$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x} + \dots + \sqrt{x}} = (y^2 - x)^2 - x \quad (n-2 \text{ dấu căn}).$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x} \text{ là số chính phương.}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) \text{ là số chính phương} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Bài 28. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}+1}{5-\sqrt{x}} - \frac{5-9\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P < 1$.

Hướng dẫn

59. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}} - \frac{\sqrt{x+1}}{5-\sqrt{x}} - \frac{5-9\sqrt{x}}{x-25} = \frac{\sqrt{x}(5-\sqrt{x}) - (\sqrt{x+1})(5+\sqrt{x}) + (5-9\sqrt{x})}{(\sqrt{x+5})(5-\sqrt{x})} \\ &= \frac{(5\sqrt{x}-x) - (x+6\sqrt{x}+5) + (5-9\sqrt{x})}{(\sqrt{x+5})(5-\sqrt{x})} = \frac{-2x-10\sqrt{x}}{(\sqrt{x+5})(5-\sqrt{x})} = \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x+5})}{(\sqrt{x+5})(5-\sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 25$$

Vậy $0 \leq x < 25$

Bài 29. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020)

$$\text{Rút gọn biểu thức: } A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

Hướng dẫn

$$(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}})(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}) = 8 - 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} + 2\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{9-5}$$

$$= 8 - 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + 2\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - 2 = 6 - 2\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{5} + 2 = 10.$$

$$\sqrt{2}(3+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}) = 4(3+\sqrt{5}) - (3+\sqrt{5})\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 4(3+\sqrt{5}) - (3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)$$

$$= 12 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 2 = 10 + 2\sqrt{5}.$$

$$\sqrt{2}(3-\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}) = 4(3-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 4(3-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)$$

$$= 12 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2 = 10 - 2\sqrt{5}.$$

Do đó:

$$A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}) + \sqrt{2}(3-\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}})(2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}})} = \frac{10+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

60. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Vậy $A = 2$.

Cách khác:

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = 2 - \frac{4}{5+\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = 2 - \frac{4}{5-\sqrt{5}}$$

$$\text{Do đó: } A = 4 - \frac{4}{5+\sqrt{5}} + \frac{4}{5-\sqrt{5}} = 4 - \frac{20-4\sqrt{5}+20+4\sqrt{5}}{25-5} = 4 - \frac{40}{20} = 2.$$

Vậy $A = 2$.

Bài 30. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020)

$$\text{Rút gọn biểu thức: } B = (13-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} B &= (13-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}} \\ &= 91+52\sqrt{3}-28\sqrt{3}-48-8\sqrt{(\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2} \\ &= 43+24\sqrt{3}-8(\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}) \\ &= 43+24\sqrt{3}-8\left(\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}\right) \\ &= 43+24\sqrt{3}-8(2\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}) \\ &= 35 \end{aligned}$$

Bài 31. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020)

Cho x, y là các số thực dương và

61. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$P = \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2y}} + \sqrt{y + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y^2x}} + \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + 1}. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + 1 = \sqrt[3]{P^2}.$$

Hướng dẫn

Đặt $a = \sqrt[3]{x}$; $b = \sqrt[3]{y}$ ($a, b > 0$), ta có

$$P = \sqrt{a^3 + a^2 + a^2b} + \sqrt{b^3 + b^2 + ab^2} + \sqrt{a+b+1}$$

$$= (a+b+1)\sqrt{a+b+1}$$

$$\sqrt[3]{P^2} = a+b+1 = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + 1.$$

Bài 32. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 38x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ khi $x = 2 + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn

Ta có $x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow (x - 2)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x^2 - 4x + 1 + 4} = 2..$$

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 38x + 5$$

$$= (x^4 - 4x^3 + x^2) + (2x^3 - 8x^2 + 2x) + (10x^2 - 40x + 10) - 5 = -5 \text{ P } A = \frac{-5}{2}.$$

Bài 33. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất các giá trị của x để $P \geq 1$.

Hướng dẫn

a) Biến đổi được

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$

Biến đổi được

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$

$$1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{x+1}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{b) } P \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2-\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 2 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2-\sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 2 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 1 \end{cases} \text{ (không xảy ra).}$$

Vậy các giá trị x cần tìm là $1 < x \leq 4$.

Bài 34. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020)

$$\text{Cho biểu thức } A = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \text{ trong đó } x > 1, x \neq 2.$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị biểu thức A là số nguyên.

Hướng dẫn

a)

63. Đường tụy gán không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$A = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$A = \frac{|\sqrt{x-1} - 1| + 1 + \sqrt{x-1}}{|x-2|} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

Nếu $1 < x < 2$ thì $A = \frac{2}{1-x}$

Nếu $x > 2$ thì $A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

b) - Nếu $1 < x < 2$ thì không có giá trị nguyên.

- Nếu $x > 2$ thì $A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

+ $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (l)

+ $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$ (n)

Bài 35. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ ($x \geq 0, x \neq 1$).

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{x - 1 + x - 9}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{2x - 10}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}
\end{aligned}$$

Bài 36. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSPT vòng 1 năm 2019-2020)

Cho các số thực x, y, a thoả mãn $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}} = a$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

Hướng dẫn

Đặt $s = \sqrt[3]{x^2}$ và $t = \sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3 + s^2 t} + \sqrt{t^3 + t^2 s} = a$.

Do $s, t \geq 0$ nên $\sqrt{s^3 + s^2 t} = s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3 + t^2 s} = t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t} = a$ hay $(s+t)^3 = a^2$.

Suy ra $s+t = \sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

(Đề thi HSG 9 huyện Triệu Phong 2019-2020)

Cho biểu thức $B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x-y} \right)$

a) Rút gọn B.

b) So sánh B và \sqrt{B} .

Lời giải

a) $x, y > 0, x \neq y$.

$$\text{Ta có: } B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right)$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{x + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$B = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}$$

$$\text{b) } \forall x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} > 0 \text{ và } x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 + \frac{3y}{4} > 0, \forall x, y > 0$$

Nên $B > 0$ với mọi x, y thỏa mãn điều kiện đã cho

$$\text{Lại có: } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - \sqrt{xy} \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1$$

Dấu “=” không xảy ra vì $x \neq y$

Vậy $0 < B < 1$, nên $\sqrt{B} > B$

(Đề thi HSG 9 huyện Triệu Phong 2019-2020)

$$\text{Cho biểu thức } D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}} \right)$$

Chứng minh D là nghiệm của phương trình $D^2 - 14D + 44 = 0$

Lời giải

Ta có:

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}} \right)$$

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$$

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{3} + 1 + 5 - \sqrt{3}$$

$$D - 6 = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}, \text{ với } (D - 6 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (D - 6)^2 = 8 - 2\sqrt{16 - 10 + 2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow (D - 6)^2 = 8 - 2(\sqrt{5} + 1) = 6 - 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (D - 6)^2 = (\sqrt{5} - 1)^2$$

$$\Rightarrow D - 6 = 1 - \sqrt{5} \text{ hay } D = 7 - \sqrt{5}$$

Ta có: $D^2 - 14D + 44 = 0$

$$\Leftrightarrow (7 - \sqrt{5})^2 - 14(7 - \sqrt{5}) + 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow 54 - 14\sqrt{5} - 98 + 14\sqrt{5} + 44 = 0$$

Vậy bài toán được chứng minh

(Đề thi HSG 9 huyện Nông Cống 2019-2020)

Cho biểu thức : $A = 1 - \left(\frac{2}{1 + 2\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{4x - 1} - \frac{1}{1 - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{4x + 4\sqrt{x} + 1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A > \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2}$

Lời giải

a) $A = 1 - \left(\frac{2}{1 + 2\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{4x - 1} - \frac{1}{1 - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{4x + 4\sqrt{x} + 1}$

Với $x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}; x \geq 0$ biểu thức A có nghĩa. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{2(2\sqrt{x} - 1) - 5\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{(2\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} : \frac{\sqrt{x} - 1}{(2\sqrt{x} + 1)^2} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{x} - 1}{(2\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} : \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= 1 - \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } A &> \frac{1-2\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{2\sqrt{x}-1} > \frac{1-2\sqrt{x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{x}-1)^2-4}{2\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{x}-1-2)(2\sqrt{x}-1+2)}{2\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-1} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 > 0 \\ 2\sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{4} \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$$

$$\text{TH2: } \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 < 0 \\ 2\sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \frac{9}{4} \\ 0 \leq x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$$

Vậy $0 \leq x < \frac{1}{4}$ hoặc $x > \frac{9}{4}$

(Đề thi HSG 9 huyện Yên Định 2012-2013)

$$\text{Cho } A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2}$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A > 0$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$A = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

b)

$$A > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad (\text{vì } \sqrt{x} > \sqrt{x}-1)$$

c)

$$A = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = -x + \sqrt{x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{4}$$

Vậy GTLN của A = $\frac{1}{4}$ khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (t/m)

(Đề thi HSG 9 huyện Chư Sê 2019-2020)

$$\text{Rút gọn biểu thức: } M = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
M &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})}}} \\
&= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} \\
&= \sqrt{4 + \sqrt{25}} = \sqrt{9} = 3.
\end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 huyện Tam Dương 2019-2020)

Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} > 0 \\
A^2 &= 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} \\
A^2 &= 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\
A^2 &= 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\
A^2 &= 6 + 2\sqrt{5} \\
A^2 &= (\sqrt{5} + 1)^2 \\
A &= \sqrt{5} + 1 \text{ (Do } A > 0 \text{)}.
\end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 huyện Thường Tín 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh: $P > 1$.

Lời giải

a) Điều kiện: P có nghĩa: $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} \right) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x} + x} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$$

$$b) P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1 \text{ (BĐT Cauchy)}$$

Vì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định nên $P > 1$.

(Đề thi HSG 9 huyện Đức Cơ 2019)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} - \frac{x+y}{y-x}$ với $x, y > 0, x \neq y$

2. Cho $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$; $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$. Tìm x sao cho $A = B$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} - \frac{x+y}{y-x} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x+y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2(x+y)}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} + 2x + 2y}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

2. + Ta có: $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ xác định khi $x \geq 0; x \neq 4$.

$$A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1$$

+ Ta có: $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$ xác định khi $x \geq 0$.

$$B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} + 2)(x + 1)}{\sqrt{x} + 2} = x + 1$$

Ta có $A = B$ nên $2\sqrt{x} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$

70. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ 2-\sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x=0$

Vậy $x=0$ khi $A=B$.

(Đề thi HSG 9 huyện Bình Giang 2019)

Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$

1) Tìm x để $A < 1$.

2) Biết $A = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}) - 1$, hãy tính giá trị của $B = \frac{\sqrt{x}+3}{2-x} : (2A)$.

3) Tìm giá trị của x nguyên để biểu thức $P = A : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên?

4) Tìm x để $A \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$

Lời giải

Rút gọn: $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$ điều kiện: $x \neq 4; x \geq 0$

$$A = \frac{\sqrt{x}+2 + \sqrt{x}-2 + x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$A = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)}$$

Do $A < 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp điều kiện $x \neq 4; x \geq 0$ ta có: $0 \leq x < 4$

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{(4+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} \right) - 1$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (4+\sqrt{3}+4-\sqrt{3}) - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3\sqrt{x}-6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

Thay $x = 9, A = 3$ vào biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+3}{2-x} : (2A)$ ta được $B = \frac{\sqrt{9}+3}{2-9} : (2 \cdot 3) = \frac{6}{-7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{-1}{7}$

Ta có: $P = A : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = -1 + \frac{3}{3-\sqrt{x}}$

Để P nguyên thì $\frac{3}{3-\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3-\sqrt{x} \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng sau:

$3-\sqrt{x}$	-3	-1	1	3
\sqrt{x}	6	4	2	0
x	36	16	4	0

Do $x \neq 4$ nên $x \in \{0; 16; 36\}$

Thay $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ vào biểu thức $A \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$ ta được:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 5\sqrt{x} - x - 4 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow -x + 6\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow 5 - (\sqrt{x}-3)^2 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

Với $x \neq 4; x \geq 0$, ta có:

$$VT = 5 - (\sqrt{x}-3)^2 \leq 5, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow x=9$$

$$VP = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x} \geq \sqrt{x+16+9-x} = 5, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x=9$$

Do $VT \leq 5; VP \geq 5 \Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow x=9$

(Đề thi HSG 9 huyện Chương Mỹ Vòng 2 năm 2020)

Cho $H = \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{xy}-y} - \frac{y}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{xy}{\sqrt{x+1}-\sqrt{xy}-\sqrt{y}}$.

Tìm x, y nguyên để $H = 20$.

Lời giải

ĐKXD: $x, y \neq 1; x, y > 0$.

$$\text{Ta có: } \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})$$

$$x + \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{xy} - \sqrt{y} = (\sqrt{x+1}) - \sqrt{y}(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})(1 - \sqrt{y})$$

$$\text{Khi đó } H = \frac{x(\sqrt{x+1}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{x\sqrt{x} + x - y + y\sqrt{y} - xy\sqrt{x} - xy\sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})[\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy]}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

72. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$H = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy}{(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{(x + \sqrt{x}) - (\sqrt{y} + \sqrt{xy}) + y(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y(1 - \sqrt{x})}{1 - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{1 - \sqrt{y}}$$

$$H = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{1 - \sqrt{y}}$$

$$H = \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$$

Ta có $H = 20 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 20 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{y} + 1) - (\sqrt{y} + 1) = 19$

$$\Rightarrow (\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 19 = 19 \cdot 1 = 1 \cdot 19 = (-1) \cdot (-19) = (-19) \cdot (-1)$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 400 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = 19 \\ \sqrt{x} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 324 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = -1 \\ \sqrt{x} - 1 = -19 \end{cases} \Rightarrow \text{loại}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = -19 \\ \sqrt{x} - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{loại}$$

Vậy với $x = 400; y = 0$ hoặc $x = 4, y = 324$ thì $H = 20$.

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2012-2013)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

Lời giải

1/ Rút gọn biểu thức A.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) \quad (\text{ĐK: } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$A = \dots = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4}$$

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

$$\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x+1}} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-8 \leq -5\sqrt{x}-5$$

$$\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Kết hợp với ĐK $\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

(Đề thi HSG 9 tỉnh huyện Cẩm Thủy 2011-2012)

Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a. Rút gọn P.

b. Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

b) $x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

c) ĐK: $x > 0; x \neq 1$:

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Học sinh lập luận để tìm ra $x = 4$ hoặc $x = 9$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2011-2012)

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \cdot \frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

1) Rút gọn P

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Lời giải

1) $P = \frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \cdot \frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ (ĐK: $x > 1; x \neq 10; x \neq 5$)

74. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Đặt $\sqrt{x-1} = a$ ($a \geq 0$)

$$P = \frac{3a+9}{(a+3)(3-a)} : \frac{2a+4}{a-3} = \frac{3(a+3)}{(a+3)(3-a)} \cdot \frac{a(a-3)}{2(a+2)} = -\frac{3a}{2(a+2)}$$

$$P = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2(\sqrt{x-1}+2)} = -\frac{3\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)}{2(x-5)}$$

2)

$$x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \quad (\text{T/M})$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1 \quad (\text{T/m})$$

$$P = -\frac{3a}{2(a+2)} = -\frac{3 \cdot 1}{2(1+2)} = -\frac{1}{2}$$

(Đề thi HSG 9 huyện Vĩnh Bảo 2013-2014)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x+y+2xy}{1-xy} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

Mẫu thức chung là $1 - xy$

$$P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

b) Ta có: $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{4-3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}-1)^2$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{1+(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{1+3-2\sqrt{3}+1} =$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{5-2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+2}{13}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Hải Dương - 2013-2014)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2-\sqrt{1-x^2}}$

với $-1 \leq x \leq 1$.

Lời giải

$$A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2-\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(2+2\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \sqrt{2x^2}$$

$$= |x|\sqrt{2}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2013-2014)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$.

a) . Rút gọn biểu thức A.

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

a) Điều kiện: $\sqrt{xy} \neq 1$.

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} :$$

$$\frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{x}}{x\sqrt{y} + \sqrt{xy}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Vậy $A = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

b) Theo Côsi, ta có: $6 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{9}.$

Vậy $\max A = 9$, đạt được khi: $x = y = \frac{1}{9}.$

(Đề thi HSG 9 huyện ... 2013-2014)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$

a) Rút gọn $P.$

b) Tính giá trị của P tại $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \\ \sqrt{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$$P = \frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (\sqrt{a} - 1)^2 + 4\sqrt{a}(a - 1)}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a - 1)}{\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}(1 + a - 1)}{\sqrt{a}} = 4a$$

Vậy $P = 4a$

b) Ta có: $a = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{2}$$

Vậy $a = \sqrt{2}$ do đó $P = 4a = 4\sqrt{2}$

:(Đề thi HSG 9 tỉnh Thái Bình 2011 - 2012)

Cho biểu thức:

$$P = \sqrt{1 - x + (1 - x)\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x - (1 - x)\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{với } x \in [-1; 1]$$

77. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{-1}{2012}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: +)} \quad 2(1-x) + 2(1-x)\sqrt{1-x^2} &= (x^2 - 2x + 1) + 2(1-x)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) \\ &= [1-x + \sqrt{1-x^2}]^2 \end{aligned}$$

$$\text{+)} \quad 2(1-x) - 2(1-x)\sqrt{1-x^2} = [1-x - \sqrt{1-x^2}]^2$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } P\sqrt{2} &= |1-x + \sqrt{1-x^2}| + |1-x - \sqrt{1-x^2}| \\ &= 1-x + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x} |\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } x = \frac{-1}{2012} \Rightarrow 1-x > 1+x &\Rightarrow P\sqrt{2} = 2(1-x) \\ &\Rightarrow P = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2012}\right) = \frac{2013}{2012} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2013}{2012} \cdot \sqrt{2}$$

(Đề thi vào 10 chuyên TPHCM 2010 - 2011)

$$\text{Thu gọn biểu thức: } A = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Lời giải

$$\text{Xét } M = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}$$

$$\text{Ta có } M > 0 \text{ và } M^2 = \frac{14 + 2\sqrt{44}}{7 + 2\sqrt{11}} = 2, \text{ suy ra } M = \sqrt{2}$$

$$A = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$$

(Đề HSG 9 huyện Xuyên Mộc 2016 - 2017)

$$\text{Rút gọn biểu thức: } P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{2\sqrt{x}-9 + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

78. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

(Đề thi HSG 9 Tỉnh Kiên Giang 2012-2013)

Rút gọn : $A = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9-x^2}}{3x - x^2 + (x+2)\sqrt{9-x^2}} : 2\sqrt{1 + \frac{2x}{3-x}}$

Lời giải

ĐK: $-3 < x < 3$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+3)(x+2) + x\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}}{x(3-x) + (x+2)\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}} : 2\sqrt{\frac{3-x}{3-x} + \frac{2x}{3-x}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x} \left[(x+2)\sqrt{3+x} + x\sqrt{3-x} \right]}{\sqrt{3-x} \left[x\sqrt{3-x} + (x+2)\sqrt{3+x} \right]} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 Tỉnh Kiên Giang 2011-2012)

Thực hiện phép tính : $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Lời giải

Nhân số bị chia và số chia với $\sqrt{2}$ ta được:

$$\begin{aligned} \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} &= \frac{\sqrt{2} \cdot (2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2} \cdot (2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (2+\sqrt{3})}{2+(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{2} \cdot (2-\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}-1)} \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{(2+\sqrt{3}) \cdot (3-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) \cdot (3+\sqrt{3})}{6} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 TP Đà Nẵng 2015-2016)

Cho biểu thức $M = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0; a \neq 1$

- Rút gọn biểu thức M
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$M = \frac{3a+3\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} + \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{(1-\sqrt{a})(\sqrt{a}+2)}$$

$$M = \frac{3a+3\sqrt{a}-3-(a-1)-(a-4)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} = \frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}$$

$$M = \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

$$M = \frac{\sqrt{a}-1+2}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}$$

M nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a}-1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{a}-1$ là ước của 2

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-1 \in \{-1; 1; 2\} \Leftrightarrow a \in \{0; 4; 9\} \text{ (do } \sqrt{a} \geq 0)$$

(Đề thi HSG 9 Tỉnh An Giang 2013-2014)

$$T = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{n-n-1} = -(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$

$$\begin{aligned} T &= -(\sqrt{1}+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (\sqrt{3}+\sqrt{4}) + (\sqrt{4}+\sqrt{5}) - \dots - (\sqrt{99}+\sqrt{100}) \\ &= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{5} - \dots - \sqrt{99} - \sqrt{100} \\ &= -1 - \sqrt{100} = -11 \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 Tỉnh Quảng Nam 2017-2018)

Cho biểu thức $A = \frac{x+8}{x\sqrt{x}+8} + \frac{1}{x-2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x+4}-4\sqrt{x}}{x-4}$

Rút gọn biểu thức A. Tìm các số nguyên x để A là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{1}{x-2\sqrt{x}+4} + \frac{|x-2|}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \\ &= \frac{3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)} = \frac{3}{x-2\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x-2\sqrt{x}+4$ là ước của 3; chỉ có $x-2\sqrt{x}+4=3$ có nghiệm $x=1$ thỏa mãn ĐK.

(Đề thi HSG 9 TP Vinh 2016-2017)

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x^3+x^2+5x+3}-6}{\sqrt{x^3-2x^2-7x+3}}$ tại $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

80. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Lời giải

$$\text{Ta có } x(\sqrt[3]{2}-1) = (1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2}-1) = 2-1=1$$

$$\text{Suy ra } x\sqrt[3]{2} = x+1 \Rightarrow 2x^3 = (x+1)^3 \text{ hay } x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{3x^2+3x+1+x^2+5x+3}-6}{\sqrt{3x^2+3x+1-2x^2-7x+3}} = \frac{\sqrt{4x^2+8x+4}-6}{\sqrt{x^2-4x+4}} \\ &= \frac{\sqrt{4(x+1)^2}-6}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{2|x+1|-6}{|x+2|} = \frac{2(x+1)-6}{x-2} = \frac{2x-4}{x-2} = 2 \end{aligned}$$

$$(\text{vì } x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > 2)$$

$$\text{Vậy } P = 2 \text{ tại } x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

(Đề thi HSG 9 Tỉnh Quảng Ninh 2018-2019)

$$\text{Rút gọn biểu thức } \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}}-1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}}-1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} + \sqrt[3]{(\sqrt[3]{4} + 1)^3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1} = 1$$

(Đề thi HSG 9 huyện Triệu Phong 2019-2020)

$$\text{Cho biểu thức } B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y} \right)$$

a) Rút gọn B.

b) So sánh B và \sqrt{B} .

Lời giải

a) $x, y > 0, x \neq y$.

$$\text{Ta có: } B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right)$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{x + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$B = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}$$

b) Vì $x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} > 0$ và $x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 + \frac{3y}{4} > 0, \forall x, y > 0$

Nên $B > 0$ với mọi x, y thỏa mãn điều kiện đã cho

Lại có: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - \sqrt{xy} \geq \sqrt{xy}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1$$

Dấu “=” không xảy ra vì $x \neq y$

Vậy $0 < B < 1$, nên $\sqrt{B} > B$

(Đề thi HSG 9 huyện Triệu Phong 2019-2020)

Cho biểu thức $D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}} \right)$

Chứng minh D là nghiệm của phương trình $D^2 - 14D + 44 = 0$

Lời giải

Ta có:

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}} \right)$$

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$$

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{3} + 1 + 5 - \sqrt{3}$$

$$D - 6 = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}, \text{ với } (D - 6 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (D - 6)^2 = 8 - 2\sqrt{16 - 10 + 2\sqrt{5}}$$

82. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\Leftrightarrow (D-6)^2 = 8-2(\sqrt{5}+1) = 6-2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (D-6)^2 = (\sqrt{5}-1)^2$$

$$\Rightarrow D-6 = 1-\sqrt{5} \text{ hay } D = 7-\sqrt{5}$$

Ta có: $D^2 - 14D + 44 = 0$

$$\Leftrightarrow (7-\sqrt{5})^2 - 14(7-\sqrt{5}) + 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow 54 - 14\sqrt{5} - 98 + 14\sqrt{5} + 44 = 0$$

Vậy bài toán được chứng minh

(Đề thi HSG 9 huyện Nông Công 2019-2020)

Cho biểu thức : $A = 1 - \left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} - \frac{1}{1-2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

c) Rút gọn biểu thức A

d) Tìm x để $A > \frac{1-2\sqrt{x}}{2}$

Lời giải

c) $A = 1 - \left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} - \frac{1}{1-2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

Với $x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}; x \geq 0$ biểu thức A có nghĩa. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} - \frac{1}{1-2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1} \\ &= 1 - \frac{2(2\sqrt{x}-1) - 5\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} : \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1} \\ &= 1 - \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

d) Ta có : $A > \frac{1-2\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{2\sqrt{x}-1} > \frac{1-2\sqrt{x}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{x}-1)^2 - 4}{2\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{x}-1-2)(2\sqrt{x}-1+2)}{2\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-1} > 0$$

TH1: $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 > 0 \\ 2\sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{4} \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$

$$\text{TH2: } \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 < 0 \\ 2\sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \frac{9}{4} \\ 0 \leq x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$$

Vậy $0 \leq x < \frac{1}{4}$ hoặc $x > \frac{1}{9}$

(Đề thi HSG 9 huyện Yên Định 2012-2013)

$$\text{Cho } A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2}$$

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $A > 0$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$A = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

b)

$$A > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad (\text{vì } \sqrt{x} > \sqrt{x}-1)$$

c)

$$A = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = -x + \sqrt{x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{4}$$

Vậy GTLN của $A = \frac{1}{4}$ khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (t/m)

(Đề thi HSG 9 huyện Chư Sê 2019-2020)

$$\text{Rút gọn biểu thức: } M = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}}$$

Lời giải

$$M = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})}}}$$

$$= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}}$$

$$= \sqrt{4 + \sqrt{25}} = \sqrt{9} = 3.$$

(Đề thi HSG 9 huyện Tam Dương 2019-2020)

Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

Lời giải

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} > 0$$

$$A^2 = 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})}$$

$$A^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$A^2 = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$$

$$A^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$A^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$A = \sqrt{5} + 1 \text{ (Do } A > 0 \text{)}.$$

(Đề thi HSG 9 huyện Thường Tín 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh: $P > 1$.

Lời giải

a) Điều kiện: P có nghĩa: $x > 0; x \neq 1$

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x} + x)} \right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{1-\sqrt{x} + x} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x} + x)}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$$

$$b) P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1 \text{ (BĐT Cauchy)}$$

Vì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định nên $P > 1$.

(Đề thi HSG 9 huyện Đức Cơ 2019)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} - \frac{x+y}{y-x}$ với $x, y > 0, x \neq y$

2. Cho $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$; $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$. Tìm x sao cho $A = B$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} - \frac{x+y}{y-x} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x+y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2(x+y)}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} + 2x + 2y}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

2. + Ta có: $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ xác định khi $x \geq 0; x \neq 4$.

$$A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1$$

+ Ta có: $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$ xác định khi $x \geq 0$.

$$B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} + 2)(x + 1)}{\sqrt{x} + 2} = x + 1$$

Ta có $A = B$ nên $2\sqrt{x} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ 2 - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x = 0$

Vậy $x = 0$ khi $A = B$.

(Đề thi HSG 9 huyện Bình Giang 2019)

Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{x}{4 - x}$ (cẩn lè - cỡ chữ 12)

86. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

1) Tìm x để $A < 1$.

2) Biết $A = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}) - 1$, hãy tính giá trị của $B = \frac{\sqrt{x+3}}{2-x} : (2A)$.

3) Tìm giá trị của x nguyên để biểu thức $P = A : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên?

4) Tìm x để $A \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$

Lời giải

Rút gọn: $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$ điều kiện: $x \neq 4; x \geq 0$

$$A = \frac{\sqrt{x}+2 + \sqrt{x}-2 + x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$A = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)}$$

Do $A < 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp điều kiện $x \neq 4; x \geq 0$ ta có: $0 \leq x < 4$

Ta có: $A = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}) - 1 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{(4+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{3})^2}) - 1$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (4+\sqrt{3}+4-\sqrt{3}) - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3\sqrt{x} - 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

Thay $x = 9, A = 3$ vào biểu thức $B = \frac{\sqrt{x+3}}{2-x} : (2A)$ ta được $B = \frac{\sqrt{9+3}}{2-9} : (2 \cdot 3) = \frac{6}{-7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{-1}{7}$

Ta có: $P = A : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = -1 + \frac{3}{3-\sqrt{x}}$

Để P nguyên thì $\frac{3}{3-\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3-\sqrt{x} \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng sau:

$3-\sqrt{x}$	-3	-1	1	3
\sqrt{x}	6	4	2	0
x	36	16	4	0

Do $x \neq 4$ nên $x \in \{0; 16; 36\}$

Thay $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ vào biểu thức $A(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$ ta được:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 5\sqrt{x} - x - 4 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow -x + 6\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow 5 - (\sqrt{x}-3)^2 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

Với $x \neq 4; x \geq 0$, ta có:

$$VT = 5 - (\sqrt{x}-3)^2 \leq 5, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow x=9$$

$$VP = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x} \geq \sqrt{x+16+9-x} = 5, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x=9$$

$$\text{Do } VT \leq 5; VP \geq 5 \Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow x=9$$

(Đề thi HSG 9 huyện Chương Mỹ Vòng 2 năm 2020)

$$\text{Cho } H = \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} - y} - \frac{y}{x + \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{xy}{\sqrt{x+1} - \sqrt{xy} - \sqrt{y}}.$$

Tìm x, y nguyên để $H = 20$.

Lời giải

ĐKXD: $x, y \neq 1; x, y > 0$.

$$\text{Ta có: } \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})$$

$$x + \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{xy} - \sqrt{y} = (\sqrt{x+1}) - \sqrt{y}(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})(1 - \sqrt{y})$$

$$\text{Khi đó } H = \frac{x(\sqrt{x+1}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{x\sqrt{x} + x - y + y\sqrt{y} - xy\sqrt{x} - xy\sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})[\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy]}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy}{(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{(x + \sqrt{x}) - (\sqrt{y} + \sqrt{xy}) + y(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)}$$

$$H = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y(1 - \sqrt{x})}{1 - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{1 - \sqrt{y}}$$

$$H = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{1 - \sqrt{y}}$$

$$H = \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$$

Ta có $H = 20 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 20 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{y} + 1) - (\sqrt{y} + 1) = 19$

$$\Rightarrow (\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 19 = 19 \cdot 1 = 1 \cdot 19 = (-1) \cdot (-19) = (-19) \cdot (-1)$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 400 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = 19 \\ \sqrt{x} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 324 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = -1 \\ \sqrt{x} - 1 = -19 \end{cases} \Rightarrow \text{loại}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} \sqrt{y} + 1 = -19 \\ \sqrt{x} - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{loại}$$

Vậy với $x = 400; y = 0$ hoặc $x = 4, y = 324$ thì $H = 20$.

(Đề thi HSG 9 huyện BA VÌ 2019-2020)

Cho biểu thức $P = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị của x để $P = 0; P = 1$.

c) Tìm các giá trị của x để $P > 0$.

Lời giải

Cho biểu thức $P = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

a) Sau khi biến đổi thu gọn ta được $P = \frac{x+4}{6}$

b) Với $P = 0 \Leftrightarrow x = -4 (t/m)$ với $P = 1 \Leftrightarrow x = -2$ (không thỏa mãn đkxđ)

c) $P > 0 \Leftrightarrow x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$ và $x \neq 0; 2; -2; -3$.

(Đề thi HSG 9 VINH 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$.

a) Rút gọn P .

89. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Tính giá trị của P tại $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Lời giải

$$\text{a) Điều kiện } \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \\ \sqrt{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (\sqrt{a} - 1)^2 + 4\sqrt{a}(a - 1)}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}}$$
$$= \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a - 1)}{\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}(1 + a - 1)}{\sqrt{a}} = 4a$$

Vậy $P = 4a$.

$$\text{b) } a = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3} - 1)$$
$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{2}$$

Vậy $a = \sqrt{2}$ do đó $P = 4a = 4\sqrt{2}$.

(Đề thi HSG 9 huyện CẨM XUYÊN 2019-2020)

Với giá trị nào của x thì $\sqrt{x^2 - 9}$ có nghĩa?

Lời giải

$$\text{Để biểu thức } \sqrt{x^2 - 9} \text{ có nghĩa thì } x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

(Đề thi HSG 9 huyện CẨM XUYÊN 2019-2020)

Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$A = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}$$

$$A = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1$$

$$A = 3$$

(Đề thi HSG 9 huyện CẨM XUYÊN 2019-2020)

Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - \sqrt{x^2 - 4}}$ với $x \geq 2\sqrt{2}$

90. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Lời giải

$$P = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - \sqrt{x^2 - 4}}$$

$$P = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4} + \sqrt{x^2 - 4} + 1} - \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4} - \sqrt{x^2 - 4} + 1}$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 1\right)^2}$$

$$P = \left| \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1 \right| - \left| \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 1 \right|$$

$$P = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1 \quad (\text{Vì } x \geq 2\sqrt{2})$$

$$P = 2$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh ĐÀ NẴNG 2010-2011)

Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M > 4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải

a) Do $a > 0; a \neq 1$ nên: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ và

$$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$$

Do $a > 0; a \neq 1$ nên: $(\sqrt{a}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a+1 > 2\sqrt{a}$

$$\Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$$

b) Ta có $0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1

$$\text{Mà } N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a-4\sqrt{a}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 + \sqrt{3} \text{ hay } \sqrt{a} = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{phù hợp})$$

$$\text{Vậy } N \text{ nguyên} \Leftrightarrow a = (2 \pm \sqrt{3})^2$$

(Đề thi HSG 9 huyện HOÀNG HÓA 2019)

Cho biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x-3}}{x + \sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Lời giải

a/ ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - x + 1 - x + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

b) Rút gọn P khi $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x &= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow x^3 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})} \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \right) \\ \Leftrightarrow x^3 &= 40 + 6x \Leftrightarrow x^3 - 6x - 40 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 4x + 10) &= 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad (\text{vì } x^2 + 4x + 10 = (x+2)^2 + 6 > 0) \end{aligned}$$

Thay $x = 4$ vào biểu thức thu gọn ta được $P = 3$

(Đề thi HSG 9 huyện NAM ĐÀN 2019-2020)

Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \sqrt{7-\sqrt{13}} - \sqrt{7+\sqrt{13}} + \sqrt{2}$.

b) $B = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{4(x-y)^2x^2}}{x(x-y)} - \frac{\sqrt{(x-y)^2y^2}}{y(x-y)}$ (Điều kiện: $x < y < 0$).

Lời giải

a) $A = \sqrt{7-\sqrt{13}} - \sqrt{7+\sqrt{13}} + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}A = \sqrt{14-2\sqrt{13}} - \sqrt{14+2\sqrt{13}} + 2$

$$\Rightarrow \sqrt{2}A = \sqrt{(\sqrt{13}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13}+1)^2} + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}A = \sqrt{13}-1 - \sqrt{13}-1 + 2$$

$$\Rightarrow A = 0.$$

b) Vì $x < y < 0$ nên $xy > 0$ và $x - y < 0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{4(x-y)^2 x^2}}{x(x-y)} - \frac{\sqrt{(x-y)^2 y^2}}{y(x-y)} = \frac{xy}{xy} + \frac{2(y-x)(-x)}{x(x-y)} - \frac{(y-x)(-y)}{y(x-y)} \\ &= 1 + 2 - 1 = 2. \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 huyện CAM LỘ 2008-2009)

Chúng minh rằng : $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}}$ là số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6+\sqrt{2}})^2}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = 1 \in \mathbb{Z}.$$

(Đề thi HSG 9 huyện HƯƠNG KHÊ 2019)

Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

Lời giải

$$A^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3}$$

$$A^2 = 4 - 2\sqrt{4-3} = 4 - 2 = 2$$

Vậy $A = 1$.

(Đề thi HSG 9 huyện HƯƠNG KHÊ 2019)

Tính giá trị của biểu thức: $M = \sqrt{1+2019^2 + \left(\frac{2019}{2020}\right)^2} + \frac{2019}{2020}$

Lời giải

Ta có: $2020^2 = (2019+1)^2 = 2019^2 + 2 \cdot 2019 \cdot 1 + 1$

$$\Rightarrow 1 + 2019^2 = 2020^2 - 2 \cdot 2019$$

$$M = \sqrt{1+2019^2 + \left(\frac{2019}{2020}\right)^2} + \frac{2019}{2020} = \sqrt{2020^2 - 2 \cdot 2019 + \frac{2019^2}{2020^2}} + \frac{2019}{2020}$$

$$= \sqrt{\left(2020 - \frac{2019}{2020}\right)^2} + \frac{2019}{2020} = 2020 - \frac{2019}{2020} + \frac{2019}{2020} = 2020$$

93. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Bài 55. (Đề thi HSG 9 huyện HUƠNG SƠN 2019-2020)

Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}+2\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}-2\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}} - \sqrt{2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

Bài 56. (Đề thi HSG 9 huyện Như Thanh 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x-1}}{2}$

1. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa và rút gọn biểu thức A .
2. Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 2.
3. Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 3 + (\sqrt[3]{2} + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}$.

Lời giải

1. ĐKXD: $x \geq 0$; $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x-1}}{2} \\ &= \left[\frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x-1})-(x+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x+1})} \right] : \frac{\sqrt{x-1}}{2} \\ &= \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x+1})} \cdot \frac{2}{\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2 \cdot (x-2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x-1})^2 \cdot (x+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{2 \cdot (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x-1})^2 \cdot (x+\sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{x + \sqrt{x+1}}.$$

Vậy $A = \frac{2}{x + \sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

2. Ta có $A = 2 \Rightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x+1}} = 2$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 (t/m) \text{ (vì } \sqrt{x+1} > 0 \text{ với } \forall x)$$

Vậy $x = 0$ thì $A = 2$.

3. Ta có: $x = 3 + (\sqrt[3]{2} + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}$

$$\Leftrightarrow x - 3 = (\sqrt[3]{2} + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^3 = (\sqrt[3]{2} + 1)^3 \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^3 = \left[3 + 3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1) \right] \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^3 = \left[1 + \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1) \right] \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^3 = (\sqrt[3]{2} - 1) + \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1) \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^3 = \sqrt[3]{2} - 1 + \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2^2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^3 = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 4 (t/m)$$

Thay $x = 4$ thỏa mãn ĐKXD vào A ta được $A = \frac{2}{4 + \sqrt{4+1}} = \frac{2}{7}$.

Vậy $A = \frac{2}{4 + \sqrt{4+1}} = \frac{2}{7}$ với $x = 3 + (\sqrt[3]{2} + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}$.

Bài 57. (Đề thi HSG 9 huyện Kim Động 2019-2020)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$.

b) So sánh $B = \sqrt{2020^2 - 1} - \sqrt{2019^2 - 1}$ và $C = \frac{2 \cdot 2019}{\sqrt{2020^2 - 1} + \sqrt{2019^2 - 1}}$.

Lời giải

a) $A = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$

$$A = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[3]{2}.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{2020^2 - 1} - \sqrt{2019^2 - 1} = \frac{(2020^2 - 1) - (2019^2 - 1)}{\sqrt{2020^2 - 1} + \sqrt{2019^2 - 1}} = \frac{2020^2 - 2019^2}{\sqrt{2020^2 - 1} + \sqrt{2019^2 - 1}} \\ &= \frac{(2020 - 2019)(2020 + 2019)}{\sqrt{2020^2 - 1} + \sqrt{2019^2 - 1}} = \frac{2020 + 2019}{\sqrt{2020^2 - 1} + \sqrt{2019^2 - 1}} > \frac{2 \cdot 2019}{\sqrt{2020^2 - 1} + \sqrt{2019^2 - 1}} = C \end{aligned}$$

Vậy ta có $B > C$.

(Đề thi HSG 9 huyện Thạch Hà 2019-2020)

a) Tính giá trị biểu thức $T = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

b) Chứng minh rằng: $A = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{2}$.

c) Tính giá trị biểu thức $N = x^{2019} + 3x^{2020} - 2x^{2021}$ với $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

d) Cho $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ và $y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$. Tính $M = x^5 + y^5$.

Lời giải

a) $T = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - (2\sqrt{5} - 3)}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)} = 1.$$

$$\text{b) } A = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} \Rightarrow A^2 = \frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1} \Rightarrow A = \sqrt{2} \text{ (dpcm)}.$$

$$\text{c) } x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2} - (\sqrt{2}+1) = -1$$

Với $x = -1$, ta có: $N = -1 + 3 + 2 = 4$.

$$\text{d) Ta có: } xy = \frac{1}{2} \text{ và } x + y = \sqrt{3}.$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{11\sqrt{3}}{4}.$$

(Đề thi HSG 9 Quảng Trị 2019-2020)

$$1. \text{ Rút gọn biểu thức } P = \left(\frac{a}{3+a} + \frac{a^2+9}{9-a^2} \right) : \left(\frac{3a-1}{a^2-3a} - \frac{1}{a} \right)$$

$$2. \text{ Tính giá trị của } P \text{ biết } a+1 = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$$

Lời giải

$$1. P = \left(\frac{a}{3+a} + \frac{a^2+9}{9-a^2} \right) : \left(\frac{3a-1}{a^2-3a} - \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{a(3-a) + a^2 + 9}{9-a^2} : \frac{3a-1-a+3}{a^2-3a}$$

$$= \frac{3a+9}{9-a^2} \cdot \frac{a^2-3a}{2a+2}$$

$$= \frac{3(a+3)}{(3-a)(3+a)} \cdot \frac{a(a-3)}{2a+2} = \frac{-3a}{2a+2}$$

$$2. a+1 = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{9 - (2\sqrt{2})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{1}$$

$$= |\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-1|$$

$$= \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow P = \frac{-3.1}{2.1+2} = \frac{-3}{4}$$

(Đề thi HSG 9 Quận Cầu Giấy 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Lời giải:

a) Để P có nghĩa thì:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ 2x + \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x} \neq 1 \\ x \neq 1 \\ 2(\sqrt{x} - \frac{1}{2})(\sqrt{x} + 1) \neq 0 \\ \sqrt{x} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 \neq 1 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$ thì P có nghĩa.

Ta có: $P = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P &= \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-\frac{1}{2})(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\
&= \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\
&= \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - \sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\
&= \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - x\sqrt{x} - x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\
&= \left(\frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2x\sqrt{x} - x + 2x - \sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x(2\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}.
\end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$ thì $P = \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) Ta có: $P = \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}+1-1}{x+\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$ đạt giá trị lớn nhất

$\Rightarrow x+\sqrt{x}+1$ phải đạt giá trị nhỏ nhất.

Lại có $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$ nên $x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$.

\Rightarrow Giá trị nhỏ nhất của $x + \sqrt{x} + 1 = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$

\Rightarrow Giá trị nhỏ nhất của $P = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy với $x = 0$ thì P có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

(Đề thi HSG 9 Huyện Quan Sơn 2019-2020)

Cho
$$P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$$

1. Rút gọn P . Với giá trị nào của x thì $P > 1$.

2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

1. ĐK : $x \geq 0; x \neq 1$

a)
$$P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 2)(x - 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{(\sqrt{x} + 2)(x - 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{x - 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{2x + 2}{x - 1}$$

b) $P > 1 \Leftrightarrow \frac{2x + 2}{x - 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x + 3}{x - 1} > 0$.

Với $x \geq 0; x \neq 1$ thì $x+3 > 0$. Nên $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Vậy $x > 1$

$$2. \text{ Ta có } P = \frac{2x+2}{x-1} = \frac{(2x-2)+4}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1}$$

P có giá trị lớn nhất khi $2 + \frac{4}{x-1}$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x-1$ là số nguyên dương nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$$

(Đề thi HSG 9 Đồng Xuân 2011 - 2012)

a/ Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$.

$$b/ \text{ Cho } P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

+ Tìm điều kiện của x để P xác định.

+ Rút gọn P

Lời giải

$$a/ \quad x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x - 10x + 10 = (x-1)(x^2 - 3x - 10) = (x-1)(x^2 - 5x + 2x - 10) \\ = (x-1)(x-5)(x+2)$$

b/

+ P xác định khi $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$+ \text{ Rút gọn } P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\ = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1]}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x}+1)[(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+1]}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2$$

(Đề thi HSG 9 Đồng Xuân 2012 - 2013)

a/ Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 9x + 20$

$$b/ \text{ Rút gọn } A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

Lời giải

$$a/ \quad x^2 - 9x + 20 = x^2 - 4x - 5x + 20 = x(x-4) - 5(x-4) = (x-4)(x-5)$$

b/ Với ĐK : $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có:

$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{(2\sqrt{x}-9)-(x-9)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{x+4\sqrt{x}+3}{x-9}$$

(Đề thi HSG 9 Đồng Xuân 2013 - 2014)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 4x - 21$

2. Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt{x}-1}$

a) Tìm điều kiện để A xác định. Rút gọn A

b) Tính giá trị của A khi $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$

c) Tìm giá trị của x để $A = 16$

Lời giải

1. $x^2 - 4x - 21 = x^2 - 7x + 3x - 21 = x(x-7) + 3(x-7) = (x-7)(x+3)$

2. a) $A = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt{x}-1}$

Điều kiện để A xác định:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \{x > 1\}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$= x - 2\sqrt{x-1}$$

b) Khi $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{9^2-(2\sqrt{7})^2} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{53} = 9+2\sqrt{7}$ biểu thức A có giá trị là:

$$A = (9+2\sqrt{7}) - 2\sqrt{(1+\sqrt{7})^2} = 9+2\sqrt{7} - 2 - 2\sqrt{7} = 7$$

c) Với $x > 1$ ta có: $A = 16$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} = 16$$

$$\Leftrightarrow (x-1) - 2\sqrt{x-1} - 15 = 0$$

$$\sqrt{x-1} = X \Rightarrow X^2 - 2X - 15 = 0 \Leftrightarrow (X-5)(X+3) = 0$$

$$\Rightarrow X = 5(TM); X = -3(L)$$

$$X = 5 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 5 \Leftrightarrow x-1 = 25 \Leftrightarrow x = 26 \text{ (thỏa ĐK)}$$

Vậy $x = 26$ thì $A = 16$

(Đề thi HSG 9 Đồng Xuân 2014 - 2015)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 7x - 8$

2. Cho biểu thức
$$P = \frac{5 - \sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 6}{1 - \sqrt{x}}$$

a/ Rút gọn biểu thức P .

b/ Tìm x để $P < 1$

c/ Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên

Lời giải

1. $x^2 - 7x - 8 = x^2 - 8x + x - 8 = x(x-8) + (x-8) = (x-8)(x+1)$

2. a/ Với ĐK : $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{5 - \sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 6}{1 - \sqrt{x}} = \frac{(5 - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + (2\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{5 - \sqrt{x} - x + 1 + 2x + 2\sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

b/ Với ĐK : $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1$ ta có $P < 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 3 - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy $0 \leq x < 1$ thì $P < 1$

c) Ta có
$$P = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1 + 4}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 1}$$

Vậy P nguyên khi $4: \sqrt{x}-1$ suy ra $\sqrt{x}-1 \in U(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$

$$\Rightarrow x \in \{0; 4; 9; 25\}$$

Do $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1$ nên $x \in \{0; 9; 25\}$

(Đề thi HSG 9 huyện Đồng Xuân 2015-2016)

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

a/ Rút gọn biểu thức A.

b/ Tính A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$

c/ Tìm x để A có giá trị là $\frac{1}{2}$

Lời giải

a/ Rút gọn biểu thức A.

Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có $A = \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x}+2+x-9-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}} (\sqrt{x}-2)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}}$$

b/ Khi $x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$ ta có $A = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}-2}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+1} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$

Vậy khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$ thì $A = 1 - \sqrt{3}$

c/ Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 25 \text{ (thỏa ĐK)}$$

Vậy $x = 25$ thì $A = \frac{1}{2}$

(Đề thi HSG 9 huyện Chương Mỹ 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$

a) Tìm x để $A < 1$

b) Biết $A = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}) - 1$, hãy tính giá trị của $B = \frac{\sqrt{x+3}}{2-x} : (2A)$

c) Tìm giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên, khi $P = A : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$

d) Tìm x để $A \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$

Lời giải

a) Đk: $x \neq 4; x \geq 0$

Rút gọn $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

Do $A < 1$ nên suy ra: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp với điều kiện rồi kết luận: $0 \leq x < 4$

b)- Tính được $A = 3$

- Từ đó suy ra: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = 3$, tìm được $x = 9$ (tmđk)

- Thay vào biểu thức $B = \frac{6}{-7} : 6 = \frac{-1}{7}$

c)- Tính được $P = \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = -1 + \frac{3}{3-\sqrt{x}}$

- Để P nguyên thì $\frac{3}{3-\sqrt{x}} \in \mathbb{Z}$ từ đó lập luận tìm x là 0; 36; 16; 4

- So sánh điều kiện và kết luận $x \in \{0; 16; 36\}$

d) Thay A vào rồi biến đổi đưa về dạng $5 - (\sqrt{x}-3)^2 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$

- Đánh giá VT ≤ 5 ; VP ≥ 5 với mọi x thuộc ĐKXD

- Từ đó quy ra: dấu bằng xảy ra khi $x = 9$

- Kết luận

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2018-2019)

1. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x :

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x}-3}{2(x-4\sqrt{x}+3)(2-\sqrt{x})} - \frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12} - \frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}$$

Điều kiện $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9; x \neq 1$.

2. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Lời giải

1. Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9; x \neq 1$

Ta có $A = \frac{6x - x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 3}{-2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}$

$$= \frac{-6x + x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + 3 + 3(\sqrt{x}-1) + 2(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x\sqrt{x} - 6x + 11\sqrt{x} - 6}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1)(x-5\sqrt{x}+6)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy A không phụ thuộc vào giá trị của x.

$$\begin{aligned}
2. B &= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{3})}{2(3+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{2}(4-2\sqrt{3})}{2(1-\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})^2}{2(1-\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}} + \frac{(1-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{\sqrt{6}} = \frac{1+2\sqrt{3}-3}{\sqrt{6}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{3}.$$

(Đề thi HSG 9 huyện Kỳ Anh 2019-2020)

a) Tính giá trị của biểu thức : $A = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

b) Cho $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$ Tính giá trị của : $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a) A &= \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}} \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{56}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+1} - \frac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1} = \frac{6}{11} \Rightarrow A = \frac{6\sqrt{2}}{11}
\end{aligned}$$

b) Từ giả thiết $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 \Rightarrow x^2y^2 + (1+x^2)(1+y^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$ (bình phương 2 vế)

$$\Rightarrow 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 0$$

Mặt khác : $(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2})^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$

$$\text{Vậy : } x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0$$

(Đề thi HSG 9 quận Thanh Xuân 2019-2020)

106. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của A khi $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

Lời giải

a) $A = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$

$$A = \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3(\sqrt{3}-1)}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 2$

Vậy $A = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Phú Yên 2014-2015)

a) Cho $x > 0, y > \sqrt{x}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{y+\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2-x}}{2}} + \sqrt{\frac{y-\sqrt{y^2-x}}{2}}; \sqrt{y-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2-x}}{2}} - \sqrt{\frac{y-\sqrt{y^2-x}}{2}}$$

b) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} \left(\sqrt{(1+a)^3} - \sqrt{(1-a)^3} \right)}{2+\sqrt{1-a^2}}$

ĐÁP ÁN

a) Cho $x > 0, y > \sqrt{x}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{y+\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2-x}}{2}} + \sqrt{\frac{y-\sqrt{y^2-x}}{2}} \quad (1);$$

$$\sqrt{y-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2-x}}{2}} - \sqrt{\frac{y-\sqrt{y^2-x}}{2}} \quad (2).$$

Đặt $\sqrt{y+\sqrt{x}} + \sqrt{y-\sqrt{x}} = z$.

Bình phương 2 vế ta được: $z^2 = 2y + 2\sqrt{y^2-x}$.

Từ đó ta có: $\sqrt{y+\sqrt{x}} + \sqrt{y-\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2-x}}{2}} \quad (3).$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{y-\sqrt{y^2-x}}{2}} \quad (4).$

Lấy (3) cộng (4) ta được: $\sqrt{y+\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2-x}}{2}} + \sqrt{\frac{y-\sqrt{y^2-x}}{2}}$; Lấy (3) trừ (4) ta được:

$$\sqrt{y-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2-x}}{2}} - \sqrt{\frac{y-\sqrt{y^2-x}}{2}}.$$

b) Rút gọn biểu thức:
$$P = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} \left(\sqrt{(1+a)^3} - \sqrt{(1-a)^3} \right)}{2+\sqrt{1-a^2}}.$$

Điều kiện $-1 \leq a \leq 1$. Áp dụng công thức (1) ta được:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-1+a^2}}{2}} + \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-1+a^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+|a|}{2}} + \sqrt{\frac{1-|a|}{2}}.$$

Với $a \geq 0$ hoặc $a < 0$ ta đều có: $\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})$.

Ta lại có:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+a)^3} - \sqrt{(1-a)^3} &= (\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})(1+a + \sqrt{1-a^2} + 1-a) \\ &= (\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})(2 + \sqrt{1-a^2}). \end{aligned}$$

Vậy
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}) = a\sqrt{2}.$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Phú Yên 2015-2016)

Cho biểu thức:

$$P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right).$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

ĐÁP ÁN

a) Rút gọn P

Điều kiện: $a > 0, a \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \\ &+ \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+1) - (2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{(a+\sqrt{a}+1) - (a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(3a+3\sqrt{a}) - (\sqrt{a}+a-2)}{a-1} \\ &= \frac{2\sqrt{a} + (2a+2\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{2a+4\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}} = \frac{2(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

b) Chứng minh $P > 6$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P-6 &= \frac{2(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}} - 6 = \frac{2(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}{\sqrt{a}} > 0, \forall a > 0 \text{ và } a \neq 1. \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Phú Yên 2016-2017)

Rút gọn và tính giá trị biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{xy\sqrt{y}} - \frac{1}{xy\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{x^2 + xy + 2x\sqrt{xy}} + \frac{1}{xy + y^2 + 2y\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \right)$$

với $x = 3 - \sqrt{8}$ và $y = 3 + \sqrt{8}$.

ĐÁP ÁN

Rút gọn biểu thức:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{xy\sqrt{y}} - \frac{1}{xy\sqrt{x}} \right) : \\ &\quad \left(\frac{1}{x^2 + xy + 2x\sqrt{xy}} + \frac{1}{xy + y^2 + 2y\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \right) \end{aligned}$$

với $x = 3 - \sqrt{8}$ và $y = 3 + \sqrt{8}$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{xy\sqrt{y}} - \frac{1}{xy\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}};$$

$$\frac{1}{x^2 + xy + 2x\sqrt{xy}} + \frac{1}{xy + y^2 + 2y\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} =$$

$$\frac{1}{x(x + y + 2\sqrt{xy})} + \frac{1}{y(x + y + 2\sqrt{xy})} + \frac{2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{x + y}{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} + \frac{2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \frac{1}{xy},$$

$$\text{Suy ra: } P = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.$$

$$\text{Vì } x = 3 - \sqrt{8} = (\sqrt{2} - 1)^2; y = 3 + \sqrt{8} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\text{Suy ra : } P = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)^2}} = -2.$$

(ĐỀ TS VÀO 10 CHUYÊN TOÁN HÀ NAM 2013-2014)

$$\text{Cho biểu thức } M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$$

a) Tìm điều kiện của a và b để M xác định và rút gọn M .

b) Tính giá trị của M khi $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$

Lời giải:

$$\text{a) } M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$$

$$\text{ĐK xác định của } M : \begin{cases} a, b \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{2a + 2a\sqrt{2} - 2\sqrt{3ab} + 2\sqrt{3ab} - 3b - 2a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}} \\ &= \frac{2a - 3b}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}} = \frac{(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})(\sqrt{2a} - \sqrt{3b})}{\sqrt{a}(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})} = \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{3b}}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } M &= \sqrt{2} - \sqrt{\frac{3b}{a}} \text{ với } a = 1 + 3\sqrt{2}, b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3} \\ \Rightarrow \frac{3b}{a} &= \frac{30 + 22\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \frac{(30 + 22\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)}{(1 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)} = \frac{102 + 68\sqrt{2}}{17} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{3b}{a}} = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{Từ đó } M = \sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) = -2$$

(ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH QUẢNG BÌNH 2012-2013)

$$\text{Cho biểu thức: } P = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}.$$

a) Rút gọn P .

b) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) ĐK: $0 \leq x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2x - 6\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - x + 16\sqrt{x} - 16}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+16)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}.$$

$$b) P = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3)\frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 10 - 6 = 4$$

Vậy GTNN của $P = 4$, dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x = 4$.

(Đề thi HSG 9 huyện CẨM THỦY (V2) 2011-2012)

Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

d. Rút gọn P .

e. Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

f. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a/

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

$$b/ x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

c/ ĐK: $x > 0; x \neq 1$.

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Với $x \in \mathcal{C}$, $x > 0$, $x \neq 1$ ta có $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in \{1, 2\} \Leftrightarrow x \in \{4, 9\}$.

(Đề thi HSG 9 tỉnh HẢI DƯƠNG 2012-2013)

Cho x, y thỏa mãn $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1$

Lời giải

Ta có:

$$x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow x^3 = 2y + 3\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} \cdot \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \left(\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \right)$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x - 2y = 0$$

$$A = x^4 + x^3y + 3x^2 - 2xy + 3xy - 2y^2 + 1 = (x^4 + 3x^2 - 2xy) + (x^3y + 3xy - 2y^2) + 1$$

$$A = x(x^3 + 3x - 2y) + y(x^3 + 3x - 2y) + 1 = 1$$

(Đề thi HSG 9 huyện CẨM GIANG 2013-2014)

a) Cho biểu thức: $A = (x^2 - x - 1)^2 + 2013$.

Tính giá trị của A khi $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}$.

b) Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2013})(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013$. Chứng minh rằng $x^{2013} + y^{2013} = 0$.

Lời giải

a) Ta có $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1) - \sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{\sqrt{3}+1-1}$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1 - \sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}{\sqrt{3}+1-1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2.$$

Thay $x = 2$ vào biểu thức A , ta có:

$$A = (2^2 - 2 - 1) + 2013 = 2014.$$

Vậy khi $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}$ thì giá trị của biểu thức A là 2014.

b) $(x + \sqrt{x^2 + 2013})(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 + 2013})(x + \sqrt{x^2 + 2013})(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013(x - \sqrt{x^2 + 2013})$$

$$\Leftrightarrow -2013(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013(x - \sqrt{x^2 + 2013})$$

$$\Leftrightarrow -y - \sqrt{y^2 + 2013} = x - \sqrt{x^2 + 2013}.$$

Tương tự $-x - \sqrt{x^2 + 2013} = y - \sqrt{y^2 + 2013}$

Do đó $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^{2013} + y^{2013} = 0$ (đpcm).

(Đề thi HSG 9 huyện KIÊN GIANG 2012-2013)

Rút gọn: $A = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}} : 2\sqrt{1+\frac{2x}{3-x}}$.

Lời giải

Điều kiện: $-3 < x < 3$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+3)(x+2) + x\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}}{x(3-x) + (x+2)\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}} : 2\sqrt{\frac{3-x}{3-x} + \frac{2x}{3-x}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x}[(x+2)\sqrt{3+x} + x\sqrt{3-x}]}{\sqrt{3-x}[x\sqrt{3-x} + (x+2)\sqrt{3+x}]} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} \\ &= \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh THANH HÓA 2018-2019)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)$

1/ Rút gọn biểu thức A .

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$.

Lời giải

1/ Rút gọn biểu thức A .

$$A = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) \quad (\text{ĐK: } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{x+2} + (x-9) - (x-4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}-3)(x-4)} = \frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$$

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

$$\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x+1}} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-8 \leq -5\sqrt{x}-5$$

$$\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Kết hợp với ĐK $\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

(Đề thi HSG 9 huyện KIM THÀNH 2012-2013)

a/ Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

b/ Cho x, y, z thoả mãn: $xy + yz + zx = 1$. Hãy tính giá trị biểu thức

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$$

Lời giải

a/ Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

ĐKXD: $x \neq 4; x \neq 9$

$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

b/ Ta có:

$$xy + yz + zx = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = y(x+z) + x(x+z) = (x+z)(x+y)$$

Tương tự: $1 + y^2 = (y+z)(y+x)$, $1 + z^2 = (z+x)(z+y)$

Thay các kết quả trên vào biểu thức A để tính.

(Đề thi HSG 9 tỉnh AN GIANG 2013-2014)

Tính: $T = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$

Lời giải

$$T = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{n-n-1} = -(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$

$$\begin{aligned}
T &= -(\sqrt{1} + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{4} - \sqrt{5}) - \dots - (\sqrt{99} + \sqrt{100}) \\
&= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{5} - \dots - \sqrt{99} - \sqrt{100} \\
&= -1 - \sqrt{100} = -11.
\end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh HẢI DƯƠNG 2013-2014)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3})}{2-\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 \leq x \leq 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) (2-\sqrt{1-x^2})}{2-\sqrt{1-x^2}} \\
&= \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \\
&= \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(2+2\sqrt{1-x^2})} \\
&= \sqrt{2x^2} = |x|\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh HƯNG YÊN 2014-2015)

Cho $x = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015}$$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}}{\sqrt{3}+1}} \\
&= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Thay $x = \sqrt{2}$ vào A ta có:

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015} = (4 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1)^{2015} = 1^{2015} = 1$$

(ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN VĨNH BẢO 2013-2014)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Lời giải:

a) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

Mẫu thức chung là $1 - xy$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy} \\ &= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \end{aligned}$$

b) $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{5 - 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 2}{13}$$

(ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NINH BÌNH NĂM HỌC 2014-2015)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right]$ (với $x \geq 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn A .

116. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Chứng minh rằng $A < 1$, với mọi $x \geq 0, x \neq 4$.

c) Tìm x để A là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right] \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} - \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+4} \\ &= \left[\sqrt{x}+2 - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+4} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Xét hiệu } 1-A = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x-2\sqrt{x}+4} > 0$$

Với mọi $x \geq 0, x \neq 4$, suy ra $A < 1$ (đpcm).

c) Ta có $x-2\sqrt{x}+4 = (\sqrt{x}-1)^2 + 3 > 0$, với mọi $x \geq 0$

$$\text{suy ra } A = \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq A < 1 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow x = 0.$$

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2013 – 2014

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$$

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A .

Lời giải

1. Điều kiện: $\sqrt{xy} \neq 1$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &= \frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

2. Theo Côsi, ta có: $6 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{9}.$

Vậy: $\max A = 9$, đạt được khi: $x = y = \frac{1}{9}.$

ĐỀ THI CHỌN HSG THANH OAI NĂM HỌC 2013-2014

a) Cho $M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x+6}}\right)$

1. Rút gọn M .

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức P .

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt{6+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}.$$

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M : Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ $M = \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left[\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \left[\frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}$$

$$= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*)

2) $M = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3 : \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \in U(3)$

$$U(3) \in \{\pm 1; \pm 3\} \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$$

Nên $\sqrt{x+1} \in \{1; 3\}$ Xảy ra các trường hợp sau:

$$\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TMĐK (*))}$$

$$\sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (không TMĐK (*)) loại}$$

118. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Vậy $x = 0$ thì M nhận giá trị nguyên.

b)

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$$

$$\text{Có } \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} = |4 - \sqrt{2}| = 4 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4 - \sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = |\sqrt{3} + 1|$$

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3} - 1}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{3} - 1} - \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3} + 1| - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$$

Với $x = 1$. Ta có $P = 3 \cdot 1^{2013} + 5 \cdot 1^{2011} + 2006 = 3 + 5 + 2006 = 2014$

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2014$.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ YÊN NĂM HỌC 2015-2016

Cho biểu thức $P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right) \quad (\text{đk: } 0 < a \neq 1) \\ &= \frac{\sqrt{a^3}-1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{\sqrt{a^3}+1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + \left(\frac{\sqrt{a^2}-1}{\sqrt{a}}\right) \left(\frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{(2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{3a+3\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2-a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2a+2\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= 2 + \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{a} + 2a + 2\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a}}$$

$$= 2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + 4.$$

Vậy với $0 < a \neq 1$ thì $P = 2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + 4$.

b) Ta có $2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}} = 4$ vậy $P \geq 8$ hay $P > 6$ (đpcm).

ĐỀ CHỌN HSG LỚP 9 BẮC GIANG NĂM 2016 - 2017

a. Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn M và tính giá trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1$

b. Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\frac{5}{a + b\sqrt{2}} - \frac{4}{a - b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

c. Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$; $\sqrt{abc} = 3$

Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$

Lời giải

a) Rút gọn $M = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Ta có.

$$(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$\Leftrightarrow ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = 1$$

+ Nếu $a > b > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = 1$$

+ nếu $0 < a < b$

$$\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} < 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right| = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = -1$$

$$\text{b) } \frac{5}{a+b\sqrt{2}} - \frac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18\sqrt{2}(a^2 - 2b^2) = 3(a^2 - 2b^2)$$

$$\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2$$

$$\Leftrightarrow 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} - 9b\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

$$\Leftrightarrow (18a^2 - 36b^2 - 9b)\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

$$\text{Nếu } 18a^2 - 36b^2 - 9b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b}$$

$$\text{Vì } a, b \text{ nguyên nên } \frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{Vô lý vì } \sqrt{2} \text{ là số vô tỉ.}$$

$$\text{Vậy ta có } 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \\ 3a^2 - 6b^2 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 6b^2 = \frac{3}{2}b \\ 3a^2 - 6b^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b$$

Thay $a = \frac{3}{2}b$ vào $3a^2 - 6b^2 - a = 0$ Ta có

$$3 \cdot \frac{9}{4}b^2 - 6b^2 - \frac{3}{2}b = 0 \Leftrightarrow 27b^2 - 24b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow 3b(b-2) = 0$$

Ta có $b = 0$ (loại); $b = 2$ (thỏa mãn), vậy $a = 3$. Kết luận

$$\text{c) Ta có } (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

$$\text{mà } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7; a + b + c = 23 \text{ nên } \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 13$$

$$\text{Ta có } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7 \Rightarrow \sqrt{c} - 6 = -\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$$

$$\text{nên } \sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6 = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6 = (\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1); \sqrt{ac} + \sqrt{b} - 6 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)$$

121. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\begin{aligned}
\text{Vậy } H &= \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)} \\
&= \frac{\sqrt{c} - 1 + \sqrt{a} - 1 + \sqrt{b} - 1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} \\
&= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3}{\sqrt{abc} + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) - 1} = \frac{7 - 3}{3 + 7 - 13 - 1} = -1
\end{aligned}$$

ĐỀ CHỌN HSG LỚP 9 VINH PHÚC NĂM 2014 - 2015

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A = -6$.

Lời giải

a) A xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2\sqrt{x} - 3 \neq 0 \\ \sqrt{x} + 3 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3) \neq 0 \\ x \neq 1 \\ \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$ ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$.

$$\text{Ta có: } T = \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 7)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 1}$$

$$M = 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = T : M = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 1} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$ thì $A = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$.

b) Biến đổi: $A = -6 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x}-9 = -6(\sqrt{x}-2)$

$\Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy để $A = -6$ thì $x = 9$.

ĐỀ CHỌN HSG BẮC GIANG LỚP 9 NĂM 2017 - 2018

a/ Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

b/ Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Lời giải

a/ Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

$$* M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$

$$* M > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \\ 2-\sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4. \text{ Vậy } M > 1 \text{ khi } 1 < x < 4 \text{ và } x \neq 3$$

$$\text{b/Cho } a, b, c > 0 \text{ thỏa mãn } \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1. \text{ Tính } H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$$

$$\square \quad \text{Vì } \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1 \text{ nên } 1+c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\square \quad \text{Tương tự ta có } 1+a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c}); 1+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\square \quad \text{Vậy } H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c}) - (\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{a}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c}) - (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = 0$$

Chọn hsg lớp 9 Đà Nẵng năm 2015 - 2016

$$\text{Cho biểu thức } M = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}} \text{ với } a \geq 0; a \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } M = \frac{3a + 3\sqrt{a} - 3}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} + \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{(1-\sqrt{a})(\sqrt{a}+2)}$$

$$M = \frac{3a + 3\sqrt{a} - 3 - (a-1) - (a-4)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} = \frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}$$

$$M = \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \quad M = \frac{\sqrt{a}-1+2}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}$$

$$\text{b) } M \text{ nguyên } \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a}-1} \text{ nguyên } \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 \text{ là ước của } 2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-1 \in \{-1; 1; 2\} \Leftrightarrow a \in \{0; 4; 9\} \text{ (do } \sqrt{a} \geq 0 \text{)}.$$

(Đề thi HSG 9 TP Đà Nẵng 2017-2018)

$$\text{Tính } A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}$$

Lời giải

$$A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}} = \frac{(1+\sqrt{11}) \cdot (2-\sqrt{11})}{4-11} + \sqrt{\frac{2 \cdot (18+5\sqrt{11})}{49}} = \frac{9-\sqrt{11}+5+\sqrt{11}}{7} = 2$$

(Đề thi HSG 9 TP Đà Nẵng 2017-2018)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

Rút gọn A và chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

Lời giải

$$+ \text{Rút gọn } A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

$$A = \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} + \frac{1(x+1+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}$$

+ Chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

$$\text{Xét hiệu } A - \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} - \frac{2}{3} = \frac{6\sqrt{x}-2x-2\sqrt{x}-2}{3(x+1+\sqrt{x})} = \frac{-2(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+1+\sqrt{x})} < 0$$

$$\Leftrightarrow A - \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow A < \frac{2}{3}$$

(Đề thi HSG 9 Tỉnh Hải Dương 2017-2018)

$$\text{Cho } A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}. \text{ Rút gọn } B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1} \text{ với } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có

$$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+1)}{x - \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = 2x$$

$$B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - \sqrt{4x - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - |2\sqrt{x} - 1| = 2\sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{4})$$

125. Đường tụy gán không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Rút gọn biểu thức: $X = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Tổng quát: } \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{[n(n+1)]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2 + 2n(n+1) + 1}{[n(n+1)]^2}} = \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{[n(n+1)]^2}} = \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } X &= \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + 1 + \frac{1}{2017 \cdot 2018} \\ &= 2017 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = 2018 - \frac{1}{2018} = \frac{4072323}{2018}. \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Điện Biên 2018-2019)

1. Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) - 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $Q = \sqrt{x} - P$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho $(x + \sqrt{x^2 + 1})(2y + \sqrt{4y^2 + 1}) = 1$. Tính giá trị biểu thức $x^3 + 8y^3 + 2019$.

Lời giải:

1. ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Ta có: $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) - 1$.

$$= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}(x+1) - (x+1)}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left(\frac{x+1-2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right) - 1 = \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left(\frac{x-1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right) - 1 \\
&= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x+1} \right) - 1 = \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1} \right) - 1 \\
&= \frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{x+1+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

b) Ta có: $Q = \sqrt{x} - P = \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Đề $Q \in \mathbb{Q}$ thì $1: \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \text{ (TM)} \\ \sqrt{x+1} = -1 \text{ (KTM)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $x = 0 \Rightarrow Q \in \mathbb{Q}$.

2. Xét biểu thức: $\sqrt{x^2+1} \geq 1 \forall x$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = 1$ (1)

Tương tự: $2y + \sqrt{4y^2+1} = 1$ khi $y = 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (x + \sqrt{x^2+1})(2y + \sqrt{4y^2+1}) = 1 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Với $x = y = 0 \Rightarrow x^3 + 8y^3 + 2019 = 2019$.

Vậy $x^3 + 8y^3 + 2019 = 2019$.

(Đề thi HSG 9 huyện Hoài Nhơn 2018-2019)

a) Cho $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $B = (1 - 2x + x^2 + x^3 - x^4)^{2018}$.

b) Cho $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức: $C = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2018$.

Lời giải

a) Ta có: $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}} = \frac{2}{\frac{2}{(\sqrt{\sqrt{2}+1}-1)(\sqrt{\sqrt{2}+1}+1)}} = \sqrt{2}$. Thay $x = \sqrt{2}$ vào biểu

thức, ta được:

$$B = \left[1 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^4 \right]^{2018} = (1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 4)^{2018} = (-1)^{2018} = 1.$$

b) Ta có :

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \right)^3 = 3 + 2\sqrt{2} + 3x + 3 - 2\sqrt{2} = 6 + 3x.$$

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}} \right)^3 = 17 + 12\sqrt{2} + 3y + 17 - 12\sqrt{2} = 34 + 3y.$$

Cộng vế theo vế ta được: $x^3 + y^3 = 40 + 3x + 3y \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3(x + y) + 2018 = 2058$.

Vậy $C = 2058$ khi $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$.

(Đề thi HSG 9 huyện Thạch Hà 2018-2019)

1. Tính giá trị biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

2. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M = \frac{2018}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \quad N = \frac{-2019}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 3}}}$$

Lời giải

1. Ta có $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}} \sqrt{4 - \sqrt{15}} \right) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

Điều kiện xác định của M là $x^2 - 2x - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$$

2. Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x - \sqrt{2x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{2x+3} \geq 0 (*)$

$$\Leftrightarrow x^2 > 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases} (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $x > 3$ là điều kiện xác định của M

(Đề thi HSG 9 huyện Thạch Hà 2018-2019)

Tính giá trị của biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$

Lời giải

Theo câu 1) Ta có $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right| (*)$

Áp dụng (*) ta có:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-2)^2}} = \left| \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{(-2)} \right| = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad (\forall \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} > 0)$$

Tương tự $\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$; $\sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7}$; ...

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}} = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{4037}$$

Suy ra: $B = 2019 - \frac{1}{2019} = \frac{4076360}{2019}$

(Đề thi HSG 9 huyện Kim Thành)

1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a, Rút gọn biểu thức A .

b, Chứng minh rằng: $0 < A \leq 2$.

2. Cho biểu thức: $\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$ với $-2 < x < 2$ và $x \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $\frac{x+2}{x-2}$.

Lời giải

1. a, Ta có: $x \geq 0, x \neq 1$. Khi đó:

$$A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x+1}}$$

b, Vì $x \geq 0, x \neq 1$ ta luôn có $A > 0$

Lại có: $x + \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$ hay $A \leq 2$.

Vậy: $0 < A \leq 2$.

2. Áp dụng tính chất: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$. Ta có:

$$\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2+x}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Từ giả thiết $-2 < x < 2$ suy ra:

$$\frac{2-x}{2+x} > 0 \Rightarrow \frac{2-x}{2+x} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \Rightarrow \frac{2-x}{2+x} = (3+2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = -17-12\sqrt{2}$$

(Đề thi chọn HSG 9 Bắc Từ Liêm 2018-2019)

1. Cho biểu thức:

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)} : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 + \sqrt{5}$; $y = 3 - \sqrt{5}$

2. Cho 2 biểu thức: $P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$; $Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}$ với $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn:

$a \neq b \neq c$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh rằng: $P \cdot Q = 9$

Lời giải

1. a) ĐKXD: $x > 0; y > 0; x \neq y$

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} \\
&= \sqrt{\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} + \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
&= \sqrt{\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

b) Với $x=3+\sqrt{5}$; $y=3-\sqrt{5}$ ta có: $x > y$ do đó:

$$A = \frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} > 0$$

$$\text{Mà } A^2 = \frac{(xy)^2}{x+y-2\sqrt{xy}} = \frac{[(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})]^2}{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})-2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}} = \frac{4^2}{6-2.2} = 8$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2. Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0 \quad (1)$$

Mà $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \neq 0$ (Do $a \neq b \neq c$)

Do đó: (1) $\Leftrightarrow a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; a+c=-b; b+c=-a$ (2)

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{ab(b-a) + bc(b-c) + ac(c-a)}{abc} \\
P &= \frac{ab(a-b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c}{abc} = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \quad (3)
\end{aligned}$$

Hơn nữa:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a-b=z \\ b-c=x \\ c-a=y \end{cases} \text{ Ta có: } \begin{cases} x-y = a+b-2c = -3c \\ y-z = b+c-2a = -3a \quad (\text{do (2)}) \\ z-x = a+c-2b = -3b \end{cases}$$

131. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Vì thế:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-y) \cdot (y-z) \cdot (x-z)}{xyz} \quad (\text{Biến đổi tương tự rút gọn } P) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-3c) \cdot (-3a) \cdot [-(-3b)]}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} \\ &= \frac{-9abc}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (3), (4) ta có: $P \cdot Q = \frac{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (a-c)}{abc} \cdot \frac{-9abc}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} = 9$

Vậy $P \cdot Q = 9$

(Đề thi chọn HSG 2018-2019)

Cho biểu thức: $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1} \right)$, với $a \geq 0$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2010 - 2\sqrt{2009}$.

Lời giải

1. Điều kiện $a \neq 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1} \right) \\ &= \frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)^2 (a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a}. \end{aligned}$$

2. $a = 2010 - 2\sqrt{2009} = (\sqrt{2009} - 1)^2$

$$\Rightarrow A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2009} - 1)^2} = \sqrt{2009}.$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Quảng Ngãi 2016 2017)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Lời giải

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$$A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6}+2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6}-2\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}$$

$$A = 2\sqrt{2}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Quảng Ngãi 2016 2017)

Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

- a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A
b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Lời giải

$$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$$

- a) ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x} \end{aligned}$$

b) $B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM ĐKXĐ)

Vậy GTNN của biểu thức B = -2 khi x = 1

(Đề thi HSG 9 quận Cầu Giấy 2017 2018)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2}$ với $0 \leq x \neq 1$

- a) Tính giá trị của A với $x = 6 + 2\sqrt{5}$
b) Rút gọn B
c) Đặt $P = B:A$. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Tính giá trị của A với $x = 6 + 2\sqrt{5}$

$$x = 6 + 2\sqrt{5} = 5 + 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = |\sqrt{5} + 1| = \sqrt{5} + 1$$

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{5} + 1$ vào $A = \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 2}$

$$A = \frac{2(\sqrt{5} + 1) + 3}{2(\sqrt{5} + 1) - 2} = \frac{2\sqrt{5} + 5}{2\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{5} + 5) \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2.5 + 5 \cdot \sqrt{5}}{2.5} = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$$

Vậy $x = 6 + 2\sqrt{5}$ thì $A = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$

b) Rút gọn B

$$B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2x + \sqrt{x} - 6}{x + \sqrt{x} - 2} \quad (0 \leq x \neq 1)$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2x + \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 2) + 2x + \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{x - 1 - x + 4 + 2x + \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{2x + \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} \quad (0 \leq x \neq 1)$$

c) Đặt $P = B:A$. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

$$P = B:A = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} : \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 2} = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} = 2 + \frac{-6}{\sqrt{x} + 2}$$

$$P \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{-6}{\sqrt{x} + 2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow -6 : (\sqrt{x} + 2) \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \in U(-6)$$

$$\text{Mà } U(-6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

$$\text{Mặt khác: } \sqrt{x} + 2 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 2 \in \{2; 3; 6\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \in \{0; 1; 4\}$$

$$\Rightarrow x \in \{0; 1; 16\}$$

134. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Kết hợp ĐKXĐ: $0 \leq x \neq 1$

Kết luận: Vậy $x = \{0; 16\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

(Đề thi HSG 9 thành phố Bắc Giang 2016 2017)

a) Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$. Rút gọn M và tính giá

trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1$

b) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\frac{5}{a+b\sqrt{2}} - \frac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

c) Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a+b+c = 23$; $\sqrt{abc} = 3$ Tính giá trị biểu thức H=

$$\frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$$

Lời giải

-Rút gọn $M = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

-Ta có

$$(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$\Leftrightarrow ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = 1$$

+ Nếu $a > b > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = 1$$

+ nếu $0 < a < b$

$$\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} < 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = -1$$

$$\frac{5}{a+b\sqrt{2}} - \frac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18\sqrt{2}(a^2 - 2b^2) = 3(a^2 - 2b^2)$$

$$\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2$$

$$\Leftrightarrow 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} - 9b\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

$$\Leftrightarrow (18a^2 - 36b^2 - 9b)\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

$$\text{-Nếu } 18a^2 - 36b^2 - 9b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b}$$

Vì a, b nguyên nên $\frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ Vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ

$$- \text{Vậy ta có } 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \\ 3a^2 - 6b^2 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 6b^2 = \frac{3}{2}b \\ 3a^2 - 6b^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b$$

Thay $a = \frac{3}{2}b$ vào $3a^2 - 6b^2 - a = 0$ t

$$a \text{ có } 3 \cdot \frac{9}{4}b^2 - 6b^2 - \frac{3}{2}b = 0 \Leftrightarrow 27b^2 - 24b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow 3b(b-2) = 0$$

Ta có $b=0$ (loại); $b=2$ (thoả mãn), vậy $a=3$. Kết luận

$$\text{Ta có } (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

$$\text{mà } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7; a + b + c = 23 \text{ nên } \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 13$$

$$\text{Ta có } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7 \Rightarrow \sqrt{c} - 6 = -\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$$

$$\text{nên } \sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6 = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6 = (\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1); \sqrt{ac} + \sqrt{b} - 6 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } H &= \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{c} - 1 + \sqrt{a} - 1 + \sqrt{b} - 1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3}{\sqrt{abc} + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) - 1} = \frac{7 - 3}{3 + 7 - 13 - 1} = -1 \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 thành phố Bắc Giang 2016 2017)

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } N = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4 + \sqrt{13}}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})}{\sqrt{8 + 2\sqrt{13}}} + \sqrt{25 - 10\sqrt{2} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})}{\sqrt{(4 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{4 + \sqrt{3}}\sqrt{4 - \sqrt{3}} + (4 + \sqrt{3})}} + \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})^2}} + \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})}{\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}}} + |5 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5 \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 thành phố Bắc Giang 2016 2017)

$$\text{Cho } a, b \text{ là số hữu tỉ thỏa mãn } (a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$$

Chứng minh $\sqrt{1 + ab}$ là số hữu tỉ

Lời giải

$$(GT) \Rightarrow [(a+b)^2 - 2(ab+1)](a+b)^2 + (1+ab)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^4 - 2(a+b)^2(1+ab) + (1+ab)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(a+b)^2 - (1+ab)]^2 = 0 \Rightarrow (a+b)^2 - (1+ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 1+ab \Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{1+ab} \in \mathbb{Q}; \forall a; b \in \mathbb{Q}. KL$$

(Đề thi HSG 9 thành phố Thanh Hóa 2016 2017)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \frac{x+2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

$$P = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

$$\forall x \sqrt{x} + 3 > 0 \text{ nên } \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (t/m)}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2}{7} \text{ khi } x = 4$$

$$\forall x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < P \leq 2$$

$$\Leftrightarrow P(P - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq 2P$$

Dấu “=” xảy ra khi $P = 2 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{Vậy } P^2 \leq 2P$$

(Đề thi HSG 9 thành phố Hải Phòng 2016 2017)

$$\text{Cho } x = \frac{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}. \text{ Tính giá trị của } P = (12x^2 + 4x - 55)^{2017}.$$

$$\text{b) Cho biểu thức } M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} - a\sqrt{a}} \text{ với } a > 0, a \neq 1. \text{ Với những giá trị nào}$$

$$\text{của } a \text{ thì biểu thức } N = \frac{6}{M} \text{ nhận giá trị nguyên?}$$

Lời giải

a) Ta có :

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1) = \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^3}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} - \sqrt{5}$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}} = \frac{3 - 1}{1} = 2$$

Thay giá trị của x vào P ta được:

$$P = (12 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 55)^{2017} = 1^{2017} = 1$$

b) Với điều kiện $a > 0; a \neq 1$ thì:

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$$

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Khi đó } N = \frac{6}{M} = \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} > 0$$

Ta thấy với $0 < a \neq 1 \Rightarrow a - \sqrt{a} + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)^2} < 2$$

Do $0 < N < 2$

Để N có giá trị nguyên thì $N = 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - 2)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{3} + 2 \\ \sqrt{a} = -\sqrt{3} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ a = 7 - 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2010 2011)

a) Cho ba số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ là số hữu tỉ.

b) Cho ba số hữu tỉ x, y, z đôi một phân biệt. Chứng minh rằng: $B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$ là số hữu tỉ.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $2ab - 2bc - 2ca = 0$

Suy ra $A = \sqrt{(a+b-c)^2} = |a+b-c|$ là số hữu tỉ

Đặt $a = \frac{1}{x-y}, b = \frac{1}{y-z}, c = \frac{1}{x-z}$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Áp dụng câu 2a) suy ra $B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$ là số hữu tỉ.

(Đề thi HSG 9 thành phố Bắc Giang 2017 2018)

a) Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

b) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Lời giải

a) Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

$$\begin{aligned} *M &= \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}
\end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$

$$*M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

Ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \\ 2-\sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$. Vậy $M > 1$ khi $1 < x < 4$ và $x \neq 3$

b/Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

- Vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ nên $1+c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Tương tự ta có $1+a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c}); 1+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Vậy $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})}$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = 0$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Hải Dương 2012 2013)

Cho x, y thỏa mãn $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1.$$

Lời giải

Có $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$

$$\Rightarrow x^3 = 2y + 3\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} \cdot \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \left(\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \right)$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x - 2y = 0$$

$$A = x^4 + x^3y + 3x^2 - 2xy + 3xy - 2y^2 + 1 = (x^4 + 3x^2 - 2xy) + (x^3y + 3xy - 2y^2) + 1$$

$$=x(x^3+3x-2y)+y(x^3+3x-2y)+1=1$$

(Đề thi HSG 9 Tỉnh DakLak 2017-2018)

Rút gọn biểu thức $P = \frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $P = \frac{2017}{2018}$.

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-3+2\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-3+2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Mặt khác } P = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2016 \Leftrightarrow x = 2016^2.$$

(Đề thi HSG 9 TP Đà Nẵng 2017-2018)

$$\text{Tính } A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}$$

Lời giải

$$A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}} = \frac{(1+\sqrt{11})(2-\sqrt{11})}{4-11} + \sqrt{\frac{2(18+5\sqrt{11})}{49}}$$

$$A = \frac{9-\sqrt{11}+5+\sqrt{11}}{7} = 2$$

(Đề thi HSG 9 TP Đà Nẵng 2017-2018)

Tính Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$

Rút gọn A và chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

Lời giải

+ Rút gọn A

$$A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \text{ Với } x > 0; x \neq 1$$

$$A = \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} + \frac{1(x+1+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{(x+1+\sqrt{x})}$$

+ Chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

$$\text{Xét hiệu } A - \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{x}}{(x+1+\sqrt{x})} - \frac{2}{3}$$

$$A - \frac{2}{3} = \frac{6\sqrt{x} - 2x - 2\sqrt{x} - 2}{3(x+1+\sqrt{x})} = \frac{-2(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+1+\sqrt{x})} < 0 \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow A - \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow A < \frac{2}{3}$$

(Đề thi HSG 9 Tỉnh Bình Thuận 2017-2018)

Cho biểu thức: $Q = \sqrt{25x} : \left[\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{3x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1} \right]$ với $x \neq 1$ và $x > 0$

a) Rút gọn biểu thức Q

b) Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a, Rút gọn. Với $x \neq 1$ và $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{25x} : \left[\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{3x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1} \right] \\ &= 5\sqrt{x} : \left[\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (3\sqrt{x}+2) + 3(\sqrt{x}+1) \right] \\ &= 5\sqrt{x} : (x + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 + 3\sqrt{x} + 3) \\ &= 5\sqrt{x} : (x + \sqrt{x} + 1) \\ &= \frac{5\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

b, Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Để thấy $Q > 0$.

Phương trình sau có nghiệm $x > 0, x \neq 1$

$$Q = \frac{5\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$\Leftrightarrow Qx + (Q-5)\sqrt{x} + Q = 0 \text{ có nghiệm } x > 0, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow Qy^2 + (Q-5)y + Q = 0 \text{ có nghiệm } y > 0, y \neq 1$$

$$\Delta = (Q-5)^2 - 4Q^2 = (3Q-5)(-Q-5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq Q \leq \frac{5}{3}$$

Mà Q nguyên và $Q > 0$ nên $Q = 1$ hoặc $Q = 2$

Với $Q = 1$ Tìm được $x = 7 \pm 4\sqrt{3}$ (Thỏa mãn)

Với $Q = 2$ phương trình vô nghiệm.

(Đề thi HSG 9 huyện Xuyên Mộc (dự bị) 2016-2017)

Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3+1}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3+1}} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1) + \sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x^3+1}}{2\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1 + \sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Bắc Ninh 2016-2017)

Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8+2\sqrt{8}+1}}} \\ &= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{(\sqrt{8}+1)^2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8}+1}} \\ &= \sqrt{13+30\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}} = \sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \sqrt{18+2\sqrt{18.5}+25} \\ &= \sqrt{(\sqrt{18}+5)^2} = 3\sqrt{2}+5 \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 huyện Trục Ninh 2016-2017)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

2) Cho $A = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

$$A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}$$

$$A = 2\sqrt{2}$$

2. $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

a) ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x}$$

b) $B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM ĐKXĐ)

Vậy GTNN của biểu thức B = -2 khi x = 1

(Đề thi HSG 9 tỉnh Quảng Nam 2016-2017)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$. Rút gọn

biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$.

$$P = \left[\frac{x-4}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left(\frac{2x^2 + 4\sqrt{x} + x\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}} \right)$$

(mỗi ý trong khai triển được 0,25 điểm)

$$= \left[\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$

+ Với $x > 0$, ta có: $x\sqrt{x} + 2 = x\sqrt{x} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x\sqrt{x} \cdot 1 \cdot 1} \Rightarrow x\sqrt{x} + 2 \geq 3\sqrt{x}$

Suy ra $P = \frac{x\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}} \geq \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ hay $P \geq \frac{3}{2}$ (đấu bằng xảy ra khi $x = 1$).

Do đó, để $P \leq \frac{3}{2}$ thì $x = 1$.

Hoặc trình bày cách khác:

+ Với $x > 0$, ta có: $P \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2 \leq 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t > 0$.

Khi đó (*) trở thành: $t^3 - 3t + 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2) \leq 0$$

Vì $t+2 > 0, (t-1)^2 \geq 0$ nên $(t-1)^2(t+2) \leq 0 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1$ hay $x=1$.

(Đề thi HSG 9 tỉnh Quảng Nam 2013-2014)

Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 4$.

Lời giải

a) Với $x \geq 4$, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(x-4)+4\sqrt{x-4}} + 4 + \sqrt{(x-4)-4\sqrt{x-4}} + 4 \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \\ &= \sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4}-2| \end{aligned}$$

Xét các trường hợp :

* Với $x \geq 8$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 \\ &= 2\sqrt{x-4} \end{aligned}$$

* Với $4 \leq x < 8$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x-4} + 2 - \sqrt{x-4} + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 thành phố Thanh Hóa 2015 - 2016)

$$\text{Cho } P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P > 1$
2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất

Lời giải

1. Điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2(x+1)}{x-1} \end{aligned}$$

$$P > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} > 0 \text{ Theo đ/k } x > 0 \Rightarrow x + 3 > 0$$

$$\Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Kết hợp điều kiện $x > 0$; $x \neq 1$; 4

Suy ra $x > 1$; $x \neq 4$ thì $P > 1$

$$2. P = \frac{2(x+1)}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1} \text{ Với } x > 0; x \neq 1; 4$$

P nguyên $\Leftrightarrow x - 1$ là ước của 4

P đạt giá trị nguyên lớn nhất $\Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $x = 2$

(Đề thi HSG 9 huyện Hạ Hòa 2015 - 2016)

$$\text{Cho } (x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x + y + 2016$.

Lời giải

$$\text{Cho } (x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015. \text{ Hãy tính } A \text{ biết: } A = x + y + 2016?$$

Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(x - \sqrt{x^2 + 2015})$ ta được:

$$-2015(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015(x - \sqrt{x^2 + 2015}) \quad (1)$$

Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(y - \sqrt{y^2 + 2015})$ ta được:

$$-2015(x + \sqrt{x^2 + 2015}) = 2015(y - \sqrt{y^2 + 2015}) \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) theo vế rồi rút gọn ta được: $x + y = 0$.

Vậy $A = 2016$.

(Đề thi HSG 9 tỉnh Ninh Bình 2014 - 2015)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right]$$

Với x không âm, khác 4 .

a, Rút gọn A

b, Chứng minh rằng $A < 1$ với mọi x không âm, khác 4

c, Tìm x để A là số nguyên

Lời giải

$$\begin{aligned}
& a) \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right] \\
&= \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} - \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\
&= \left[\sqrt{x}+2 - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\
&= \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - x - 2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{x+4}
\end{aligned}$$

b) Ta giả sử: $\frac{2\sqrt{x}}{x+4} < 1$

Suy ra $\frac{2\sqrt{x}-x-4}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)-3}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x}-1)^2-3}{x+4} < 0$

Vì $-(\sqrt{x}-1)^2-3 < 0$ **luôn đúng, suy ra điều phải chứng minh**

(Đề thi HSG 9 tỉnh Quảng Bình 2012 - 2013)

Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) ĐK: $0 \leq x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2x - 6\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{x\sqrt{x} - x + 16\sqrt{x} - 16}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+16)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \\
&\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 10 - 6 = 4
\end{aligned}$$

Vậy GTNN của P = 4 khi $\sqrt{x}+3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x = 4$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Hưng Yên 2014 - 2015)

147. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cho $x = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}}{\sqrt{3}+1}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Thay $x = \sqrt{2}$ vào A ta có

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015} = (4 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1)^{2015} = 1^{2015} = 1$$

Đề thi HSG tỉnh Phú Yên năm học 2017 – 2018)

Tính giá trị của $P = \frac{2+\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{1-\frac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}$

Giải:

$$P = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6} + \frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 1$$

a) Rút gọn được $A = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

b) Chứng minh được $0 < A < 1$ nên A không nguyên

(Đề thi HSG tỉnh Phú Yên năm học 2017 – 2018)

Tính giá trị của $P = \frac{2+\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{1-\frac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}$

Giải:

$$P = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6} + \frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 1$$

(Đề thi HSG tỉnh Gia Lai năm học 2011 – 2012)

Cho $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2012}$

Giải:

Rút gọn $x = \sqrt{2}$. Thay $x = \sqrt{2}$ vào biểu thức A ta được $A = 1$

(Đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2015 – 2016)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+4}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \right)$

Rút gọn biểu thức A

Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

Giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \\ 1 - \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{2(\sqrt{x}+3)}{x-4} : \frac{-(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow A = \frac{2}{2-\sqrt{x}}$$

Để $x, A \in \mathbb{Z}$ thì $2-\sqrt{x}$ là ước của 2. Suy ra $2-\sqrt{x}$ nhận các giá trị $\pm 1; \pm 2$

$2-\sqrt{x}$	1	1	2	2
X	1	9	0	16
A	2	2	1	1

(Đề thi HSG tỉnh Cần Thơ năm học 2012 – 2013)

$$P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$$

1. Cho biểu thức

Rút gọn P

Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên

2. Tính giá trị $(a^3 + 15a - 25)^{2013}$ với $a = \sqrt[3]{13 - 7\sqrt{6}} + \sqrt[3]{13 + 7\sqrt{6}}$

Giải:

a) Điều kiện : $m \geq 0; m \neq 1$

$$P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$$

$$b) P = 1 + \frac{2}{\sqrt{m-1}}$$

$$\text{Đề } P \in \mathbb{Q} \Rightarrow m \in \{4; 9\}$$

$$a = \sqrt[3]{13-7\sqrt{6}} + \sqrt[3]{13+7\sqrt{6}} \Rightarrow a^3 = 26 - 15a$$

$$\Rightarrow a^3 + 15a - 25 = 1 \Rightarrow (a^3 + 15a - 25)^{2013} = 1$$

(Đề thi HSG tỉnh Đắk Lắk năm học 2016 – 2017)

$$\text{Cho số thực } a \text{ mà } a > 2. \text{ Rút gọn biểu thức } A = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}} + \frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}} \right]$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}} + \frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}} \right] = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(\sqrt{a-1})^3+1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{a-1})^3-1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(\sqrt{a-1}+1)(a-1-\sqrt{a-1}+1)}{\sqrt{a-1}+1} + \frac{(\sqrt{a-1}-1)(a-1+\sqrt{a-1}+1)}{\sqrt{a-1}-1} \right] \\ &= \frac{1}{a} \cdot (a - \sqrt{a-1} + a + \sqrt{a-1}) = 2 \quad (\text{do } a > 2 \Rightarrow a-1 > 0; \sqrt{a-1}-1 > 0) \end{aligned}$$

(Tuyển sinh vào 10 chuyên Bình Định năm học 2013 – 2014)

$$\text{Cho biểu thức: } Q = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x + \sqrt{x}) \quad (\text{Với } x \geq 0; x \neq 1)$$

1. Rút gọn Q

2. Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên

Giải

1. Rút gọn Q

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x + \sqrt{x}) = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = \frac{x + \sqrt{x} - 2 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \end{aligned}$$

Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên:

$$Q = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \Rightarrow Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow x \in \{0; 2; 3\}$

Vậy với $x \in \{0; 2; 3\}$ thì Q nhận giá trị nguyên.

(Tuyển sinh vào 10 chuyên Bình Định năm học 2013 – 2014)

Không dùng máy tính, hãy rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} - \sqrt{2}$

Giải

$A = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} - \sqrt{2}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}.A &= \sqrt{14+2\sqrt{13}} - \sqrt{14-2\sqrt{13}} - 2 = \sqrt{(\sqrt{13}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13}-1)^2} - 2 \\ &= |\sqrt{13}+1| - |\sqrt{13}-1| - 2 = \sqrt{13}+1 - \sqrt{13}+1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 0$$

(Tuyển sinh vào 10 chuyên Hải Phòng năm học 2012 – 2013)

Cho $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của A

Giải

$$1) A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$A = \frac{15\sqrt{x}-11 - (3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = -5 + \frac{17}{\sqrt{x}+3}$$

A lớn nhất $\Leftrightarrow x = 0$ khi đó A lớn nhất bằng $\frac{2}{3}$.

(Đề thi HSG tỉnh Bến Tre năm học 2016 – 2017)

Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2-8x}$. Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên

Giải:

$$B = \sqrt{\frac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2-8x} = \sqrt{\frac{(x^2+3)^2}{x^2}} + \sqrt{(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{|x|} + |x-2|$$

$$+) \text{ Nếu } x < 0: B = \frac{-x^2 - 3}{x} - x + 2 = \frac{-2x^2 + 2x - 3}{x} = -2x + 2 - \frac{3}{x}$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3) \text{ và } x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$+) \text{ Nếu } 0 < x \leq 2 : B = \frac{x^2 + 3}{x} - x + 2 = \frac{2x + 3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3) \text{ và } x > 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy:

$$B = \begin{cases} \frac{-2x^2 + 2x - 3}{x} & \text{khi } x < 0 \\ \frac{2x + 3}{x} & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ \frac{2x^2 - 2x + 3}{x} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } x \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

(Tuyển sinh vào chuyên tỉnh Quảng Ninh năm học 2017 – 2018)

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \text{ (với } x \neq 0; x \neq \sqrt{3} \text{)}.$$

1. Rút gọn biểu thức A.

$$2. \text{ Tính giá trị của biểu thức A khi } x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}.$$

Giải:

1. Với điều kiện xác định là $x \neq 0; x \neq \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right) \\ &= \left(\frac{(x - \sqrt{3})\sqrt{3} + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x - \sqrt{3}}$$

2. Ta có :

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}}$$

$= \sqrt{3} + 1$. Nên thay $x = \sqrt{3} + 1$ vào A ta có:

$$A = \frac{1}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}} = 1$$

(Đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc 2014-2015)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A = -6$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A .

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2\sqrt{x} - 3 \neq 0 \\ \sqrt{x} + 3 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \neq 0 \end{cases} \quad \text{Từ đó: } x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$$

Biến đổi:

$$\begin{aligned} & \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 7)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{2\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = 2 - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

153. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{và } 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Từ đó: } A = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$$

b) Tìm x để $A = -6$.

$$\text{Biến đổi: } A = -6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x}-9 = -6(\sqrt{x}-2)$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy để $A = -6$ thì $x = 9$

(Đề thi HSG tỉnh Bắc Giang 2017-2018)

$$\text{a) Cho biểu thức } M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

b) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$.

$$\text{Tính } H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$$

Lời giải

$$\text{a/ Cho biểu thức } M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

$$* M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1 + x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x + 3\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 5 + 2\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$$

$$* M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4. \text{ Vậy } M > 1 \text{ khi } 1 < x < 4 \text{ và } x \neq 3.$$

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} - 1 < 0 \end{cases}$$

b/Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$.

$$\text{Tính } H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{1+b}$$

Vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ nên $1+c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$

Tương tự ta có $1+a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c}); 1+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } H &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = 0 \end{aligned}$$

(Đề thi HSG tỉnh Lạng Sơn 2017-2018)

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} - x - 4\sqrt{x} + 4}{2 - 3\sqrt{x} + x\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} - 4}{2 + 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A.

Đặt $t = \sqrt{x}, t \geq 0, t \neq 1, t \neq 2$ khi đó:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{t^3 - t^2 - 4t + 4}{2 - 3t + t^3} - \frac{t^3 + t^2 - 4t - 4}{2 + 3t - t^3} \\ \Rightarrow A &= \frac{(t-1)(t-2)(t+2)}{(t-1)(t-1)(t+2)} - \frac{(t+1)(t-2)(t+2)}{(t+1)(t+1)(2-t)} \\ \Rightarrow A &= \frac{t-2}{t-1} + \frac{t+2}{t+1} = \frac{2t^2 - 4}{t^2 - 1} = 2 - \frac{2}{t^2 - 1} \\ \Rightarrow A &= 2 - \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1}$.

$$x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Do đó: $A = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}+1-1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$

(Đề thi HSG tỉnh Phú Yên 2015-2016)

Cho biểu thức: $P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}) (\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1})$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{a^3}-1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{\sqrt{a^3}+1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + (\frac{\sqrt{a^2}-1}{\sqrt{a}}) (\frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{(2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}). \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{3a+3\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2-a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} - \frac{(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2a+2\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= 2 + \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{2\sqrt{a}+2a+2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}} \\ &= 2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + 4 \end{aligned}$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Ta có $2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}} = 4$ vậy $p \geq 8$ hay $p > 6$ (đpcm).

(Đề thi HSG tỉnh Thanh Oai 2013-2014)

Cho $M = (1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}) : (\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6})$

1. Rút gọn M

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M : Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned}
M &= \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) : \left[\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \left[\frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} \\
&= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*)

$$2) M = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3: \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \in U(3)$

$$U(3) \in \{ \pm 1; \pm 3 \} \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$$

Nên $\sqrt{x+1} \in \{ 1; 3 \}$ Xây ra các trường hợp sau:

$$\cdot \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TMĐK (*))}$$

$$\cdot \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (không TMĐK (*) loại)}$$

Vậy $x = 0$ thì M nhận giá trị nguyên.

(CHỌN HSG TỈNH AN GIANG NĂM HỌC 2017-2018)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$

Tính giá trị của P tại $x = \frac{4}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right)$

Lời giải

Ta có $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right] : \left[(2\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \right] \\
&= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right] : \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right] \\
&= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Lại có :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{4}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right) \\
&= \frac{|\sqrt{5}+1| + |\sqrt{5}-1|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 4
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{4-\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

(ĐỀ THI CHỌN HSG BẮC GIANG NĂM HỌC 2017-2018)

$$\text{Cho biểu thức } M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right).$$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$.

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 1, x \neq 3, x \neq 4$.

$$\begin{aligned}
*M &= \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}
\end{aligned}$$

$$*M > 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{3(\sqrt{x-1})} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{3(\sqrt{x-1})} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x-1})} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-1}} < 0.$$

Ta có: $\sqrt{x}-2 < \sqrt{x}-1$ nên $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-1}} < 0$ khi $\begin{cases} \sqrt{x}-2 < 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$

Kết hợp ĐKXD ta có $1 < x < 4$ và $x \neq 3$

Vậy $M > 1$ khi $\Leftrightarrow 1 < x < 4$ và $x \neq 3$

(ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC NINH Năm học 2017 – 2018)

Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ với $x \geq 2.$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1} - \sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \right)}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1)}{\sqrt{2x-1}+1 - \sqrt{2x-1}-1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{x-1}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

(CHỌN HSG TỈNH BẾN TRE NĂM HỌC 2017 – 2018)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}} \\ A &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{4 + \sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{4 - \sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4 + \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4 - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}+5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2. \end{aligned}$$

(ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BA THƯỚC - NĂM 2019)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x+1}} \right) \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x-2}} \right)$, với $x \geq 4; x \neq 0.$

a) Rút gọn biểu thức $P.$

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{x-1} < 0$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{a. } P &= \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right) \\
P &= \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x})^3+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{x(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right) \\
P &= \left(\frac{2x-1}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}-2x-x+4}{\sqrt{x}-2} \right) \\
P &= \left(\frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} \right) \left(\frac{x(\sqrt{x}-2)-(x-4)}{\sqrt{x}-2} \right) \\
P &= \left(\frac{x-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} \right) \left(\frac{x(\sqrt{x}-2)-(x-4)}{\sqrt{x}-2} \right) \\
P &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(x-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)} \\
P &= \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{1} \\
P &= \sqrt{x}-2
\end{aligned}$$

$$\text{b) } P \cdot \sqrt{x-1} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)\sqrt{x-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2 < 0 \\ \sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases}$$

Vậy với $1 < x < 4$ thì $P \cdot \sqrt{x-1} < 0$.

(ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BÌNH THUẬN _ NĂM HỌC 2017-2018)

Cho biểu thức: $Q = \sqrt{25x} : \left[\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{3x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1} \right]$ với $x \neq 1$ và $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x \neq 1$ và $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
Q &= \sqrt{25x} : \left[\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{3x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1} \right] = 5\sqrt{x} : \left[\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (3\sqrt{x}+2) + 3(\sqrt{x}+1) \right] \\
&= 5\sqrt{x} : (x + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 + 3\sqrt{x} + 3) = 5\sqrt{x} : (x + \sqrt{x} + 1) = \frac{5\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}
\end{aligned}$$

b) Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Dễ thấy $Q > 0$.

Phương trình sau có nghiệm $x > 0$, $x \neq 1$.

$$Q = \frac{5\sqrt{x}}{x + \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow Q \cdot x + (Q-5) \cdot \sqrt{x} + Q = 0 \text{ có nghiệm } x > 0, x > 1.$$

$$\Leftrightarrow Q \cdot y^2 + (Q-5) \cdot y + Q = 0 \text{ có nghiệm } y > 0, y \neq 1.$$

$$\Delta = (Q-5)^2 - 4Q^2 = (3Q-5)(-Q-5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq Q \leq \frac{5}{3}.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} Q \in \mathbb{Z} \\ Q > 0 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} Q = 1 \\ Q = 2 \end{cases}.$$

Với $Q = 1$ tìm được $x = 7 \pm 4\sqrt{3}$ (Thỏa mãn).

Với $Q = 2$ phương trình vô nghiệm.

(ĐỀ THI CHỌN HSG ĐAKLAK - NĂM HỌC 2017-2018)

$$\text{Rút gọn biểu thức } P = \frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}. \text{ Tìm } x \text{ sao cho } P = \frac{2017}{2018}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-3+2\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-3+2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } P = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2016 \Leftrightarrow x = 2016^2.$$

(ĐỀ SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN Năm học 2010 – 2011)

Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a. } (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \quad \text{b. } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}}{\sqrt{12}}$$

$$\text{c. } (\sqrt{12 + 2\sqrt{14 + 2\sqrt{13}}} - \sqrt{12 + 2\sqrt{11}})(\sqrt{11} + \sqrt{13}) \quad \text{d. } \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} - 1$$

Lời giải

a.

$$\begin{aligned} (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) &= 9 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \\ &= 18 - 12 = 6 \end{aligned}$$

$$\text{b. } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{12+2\sqrt{14+2\sqrt{13}}}-\sqrt{12+2\sqrt{11}})(\sqrt{11}+\sqrt{13}) \\
 \text{c. } & = (\sqrt{12+2\sqrt{13+2}}-\sqrt{12+2\sqrt{11}})(\sqrt{11}+\sqrt{13}) \\
 & = (\sqrt{13+1}-\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}+\sqrt{13}) \\
 & = (\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})=13-11=2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin^2 x}{1+\cot x} + \frac{\cos^2 x}{1+\tan x} - 1 = \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} - 1 \\
 \text{d. } & = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} - 1 = 1 - \sin x \cos x - 1 = -\sin x \cos x
 \end{aligned}$$

(KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN Năm học 2010 – 2011)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{x-y} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a. Rút gọn P.

b. Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 5 - 2\sqrt{6}$; $y = 5 + 2\sqrt{6}$

c. Chứng minh: $0 < P < 1$

Lời giải

a. (ĐKXĐ: $x^1 > y; x > 0; y > 0$)

$$\begin{aligned}
 P & = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
 P & = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{x+y+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : \frac{x+y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
 P & = \frac{x+y+2\sqrt{xy}-x-y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y-\sqrt{xy}} \\
 P & = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y-\sqrt{xy}} \\
 P & = \frac{\sqrt{xy}}{x+y-\sqrt{xy}}
 \end{aligned}$$

b. Với $\begin{cases} x = 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ y = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}+\sqrt{2} \end{cases}$ Thay vào biểu thức ta được:

$$\begin{aligned}
 P & = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{3}+\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}} \\
 P & = \frac{1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}+1}{12-1} = \frac{2\sqrt{3}+1}{11}
 \end{aligned}$$

c.

162. Đường tụy gấn không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Với $x > 0; y > 0$ suy ra $\sqrt{xy} > 0$ và $x + y - \sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{y})^2 + \frac{3}{4}\sqrt{y} > 0 \text{ P } P > 0$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0 \text{ P } x + y - \sqrt{xy} > \sqrt{xy} \text{ P } \frac{\sqrt{xy}}{x + y - \sqrt{xy}} < 1$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Điện Biên 2018-2019)

1. Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}-x-1}\right) - 1.$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $Q = \sqrt{x} - P$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho $(x + \sqrt{x^2 + 1})(2y + \sqrt{4y^2 + 1}) = 1$. Tính giá trị biểu thức $x^3 + 8y^3 + 2019$.

Lời giải:

1. ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Ta có:
$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}-x-1}\right) - 1.$$

$$= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)-(x+1)}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{x+1-2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1 = \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{x-1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\right) - 1 = \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\right) - 1$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{x+1+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có: $Q = \sqrt{x} - P = \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$

$$\text{Đề } Q \in \square \text{ thì } 1: \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \text{ (TM)} \\ \sqrt{x+1}=-1 \text{ (KTM)} \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy $x=0 \Rightarrow Q \in \square$.

2. Xét biểu thức: $\sqrt{x^2+1} \geq 1 \forall x$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=1 \text{ (1)}$$

$$\text{Tương tự: } 2y+\sqrt{4y^2+1}=1 \text{ khi } y=0 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (x+\sqrt{x^2+1})(2y+\sqrt{4y^2+1})=1 \Leftrightarrow x=y=0.$$

$$\text{Với } x=y=0 \Rightarrow x^3+8y^3+2019=2019.$$

$$\text{Vậy } x^3+8y^3+2019=2019.$$

(Đề thi HSG 9 huyện Hoài Nhơn 2018-2019)

a) Cho $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $B = (1-2x+x^2+x^3-x^4)^{2018}$.

b) Cho $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức: $C = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2018$.

Lời giải

a) Ta có: $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}} = \frac{2}{\frac{1}{(\sqrt{\sqrt{2}+1}-1)(\sqrt{\sqrt{2}+1}+1)}} = \sqrt{2}$. Thay $x = \sqrt{2}$ vào biểu

thức, ta được:

$$B = \left[1 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^4 \right]^{2018} = (1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 4)^{2018} = (-1)^{2018} = 1.$$

b) Ta có:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \right)^3 = 3+2\sqrt{2} + 3x + 3-2\sqrt{2} = 6+3x.$$

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}} \right)^3 = 17+12\sqrt{2} + 3y + 17-12\sqrt{2} = 34+3y.$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được: } x^3 + y^3 = 40 + 3x + 3y \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2018 = 2058.$$

$$\text{Vậy } C = 2058 \text{ khi } x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \text{ và } y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}.$$

(Đề thi HSG 9 huyện Thạch Hà 2018-2019)

164. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

1. Tính giá trị biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

2. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M = \frac{2018}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \quad N = \frac{-2019}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 3}}}$$

Lời giải

1. Ta có $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}} \sqrt{4 - \sqrt{15}} \right) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

Điều kiện xác định của M là $x^2 - 2x - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$$

2. Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x - \sqrt{2x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{2x+3} \geq 0$ (*)

$$\Leftrightarrow x^2 > 2x+3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases} (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $x > 3$ là điều kiện xác định của M

(Đề thi HSG 9 huyện Thạch Hà 2018-2019)

Tính giá trị của biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$

Lời giải

$$\text{Theo câu 1) Ta có } \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right| (*)$$

Áp dụng (*) ta có:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(-2)^2}} = \left| \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{(-2)} \right| = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad (\forall \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} > 0)$$

Tương tự $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; ...

$$\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$$

Suy ra: $B = 2019 - \frac{1}{2019} = \frac{4076360}{2019}$

(Đề thi HSG 9 huyện Kim Thành)

1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a, Rút gọn biểu thức A.

b, Chứng minh rằng: $0 < A \leq 2$.

2. Cho biểu thức: $\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$ với $-2 < x < 2$ và $x \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $\frac{x+2}{x-2}$.

Lời giải

1. a, Ta có: $x \geq 0, x \neq 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

b, Vì $x \geq 0, x \neq 1$ ta luôn có $A > 0$

Lại có: $x + \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$ hay $A \leq 2$.

Vậy: $0 < A \leq 2$.

2. Áp dụng tính chất: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$. Ta có:

$$\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2+x}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Từ giả thiết $-2 < x < 2$ suy ra:

$$\frac{2-x}{2+x} > 0 \Rightarrow \frac{2-x}{2+x} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \Rightarrow \frac{2-x}{2+x} = (3+2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = -17-12\sqrt{2}$$

(Đề thi chọn HSG 9 Bắc Từ Liêm 2018-2019)

1. Cho biểu thức:

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 + \sqrt{5}$; $y = 3 - \sqrt{5}$

2. Cho 2 biểu thức: $P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$; $Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}$ với $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn:

$a \neq b \neq c$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh rằng: $P \cdot Q = 9$

Lời giải

1. a) ĐKXD: $x > 0$; $y > 0$; $x \neq y$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} + \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}} \\ &= \sqrt{\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \end{aligned}$$

b) Với $x = 3 + \sqrt{5}$; $y = 3 - \sqrt{5}$ ta có: $x > y$ do đó:

$$A = \frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} > 0$$

$$\text{Mà } A^2 = \frac{(xy)^2}{x+y-2\sqrt{xy}} = \frac{\left[(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\right]^2}{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})-2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}} = \frac{4^2}{6-2 \cdot 2} = 8$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2. Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \neq 0 \text{ (Do } a \neq b \neq c \text{)}$$

$$\text{Do đó: (1) } \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c; a + c = -b; b + c = -a \text{ (2)}$$

Mặt khác:

$$P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{ab(b-a) + bc(b-c) + ac(c-a)}{abc}$$

$$P = \frac{ab(a-b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c}{abc} = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \text{ (3)}$$

Hơn nữa:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a-b=z \\ b-c=x \\ c-a=y \end{cases} \text{ Ta có: } \begin{cases} x-y = a+b-2c = -3c \\ y-z = b+c-2a = -3a \text{ (do (2))} \\ z-x = a+c-2b = -3b \end{cases}$$

Vì thế:

$$Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-y) \cdot (y-z) \cdot (x-z)}{xyz} \text{ (Biến đổi tương tự rút gọn P)}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-3c) \cdot (-3a) \cdot [-(-3b)]}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)}$$

$$= \frac{-9abc}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} \text{ (4)}$$

$$\text{Từ (3), (4) ta có: } P \cdot Q = \frac{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (a-c)}{abc} \cdot \frac{-9abc}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} = 9$$

$$\text{Vậy } P \cdot Q = 9$$

(Đề thi chọn HSG 2018-2019)

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1} \right), \text{ với } a \geq 0.$$

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2010 - 2\sqrt{2009}$.

Lời giải

1. Điều kiện $a \neq 0$. Ta có:

168. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\begin{aligned}
A &= \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1}\right) \\
&= \frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right) \\
&= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-1)^2(a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a}.
\end{aligned}$$

$$2. a = 2010 - 2\sqrt{2009} = (\sqrt{2009} - 1)^2$$

$$\Rightarrow A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2009} - 1)^2} = \sqrt{2009}.$$

(Đề thi HSG 9 huyện Ba Đình 2016-2017)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}} - 4\right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}} - 2$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị biểu thức A khi $x = (\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})$

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 1$, ta có:

$$A = (x + \sqrt{x} + 1 + x - \sqrt{x} + 1 - 4) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - 2$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - 2$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - 2$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

b) $x = (\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} \right) \left(\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2.
\end{aligned}$$

Thay $x = 2$ vào A ta được $A = \sqrt{2}$.

(Đề thi HSG 9 huyện Ba Đình 2017-2018)

Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$B = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2} \quad (\text{với } a \neq 0; b \neq 0; |a| > |b|)$$

Lời giải

$$A = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$A = \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} - \sqrt[3]{128+64\sqrt{5}}$$

$$A = \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} - \sqrt[3]{(2+2\sqrt{5})^3}$$

$$A = (3+2\sqrt{5}) - (2+2\sqrt{5})$$

$$A = 1$$

$$B = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2} \quad (\text{với } a \neq 0; b \neq 0; |a| > |b|)$$

$$B = \frac{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a - \sqrt{a^2 - b^2})} : \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$$

$$B = \frac{a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 - a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} - a^2 + b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)} : \frac{\sqrt{a^2(a^2 - b^2)}}{b^2} \text{ do } |a| > |b|$$

$$B = \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \cdot \frac{b^2}{|a|\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$B = \frac{4a}{|a|}$$

Vậy $B = 4$ nếu $a > 0$ hoặc $B = -4$ nếu $a < 0$.

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2018-2019)

170. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cho $a = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$, $b = \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, hãy chứng minh các biểu thức $M = a + b$ và $M = a^3 + b^3$ có giá trị đều là số chẵn.

Lời giải

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2014-2015)

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(x - 4\sqrt{x} + 3)(2 - \sqrt{x})} - \frac{3}{-2x + 10\sqrt{x} - 12} - \frac{1}{3\sqrt{x} - x - 2}.$$

Điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 4$; $x \neq 9$; $x \neq 1$

Lời giải

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(x - 4\sqrt{x} + 3)(2 - \sqrt{x})} - \frac{3}{-2x + 10\sqrt{x} - 12} - \frac{1}{3\sqrt{x} - x - 2}$$

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{3}{2(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})} - \frac{1}{(2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1)}$$

Do $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$; $x \neq 9$

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3 - 3(\sqrt{x} - 1) - 2(\sqrt{x} - 3)}{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})}$$

$$A = \frac{6x - x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 3 - 3\sqrt{x} + 3 - 2\sqrt{x} + 6}{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})}$$

$$A = \frac{(2x - 6\sqrt{x}) - 2(\sqrt{x} - 3) - x(\sqrt{x} - 3) + \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})}{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2014-2015)

Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

Lời giải

$$\frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$\frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{B}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow B = \sqrt{2}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2015-2016)

Cho $P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P > 1$

2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất

Lời giải

1. Điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$P > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} > 0 \text{ Theo đ/k } x > 0 \Rightarrow x+3 > 0$$

$$\Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Kết hợp điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

Suy ra $x > 1; x \neq 4$ thì $P > 1$

$$2. P = \frac{2(x+1)}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1} \text{ Với } x > 0; x \neq 1; 4$$

P nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của 4

P đạt giá trị nguyên lớn nhất $\Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $x = 2$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Thanh Hóa 2015-2016)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} &= \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1 &= 7 \\ \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) &= 0 \end{aligned}$$

Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$ (t/m)

Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x = 4$

$$c) \forall x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < P \leq 2$$

$$\Leftrightarrow P(P - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq 2P$$

Dấu “=” xảy ra khi $P = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $P^2 \leq 2P$

(Đề thi HSG 9 quận Ba Đình 2016-2017)

Tìm số thực x để biểu thức $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Đặt } M = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \quad (x \geq 0)$$

$$\text{Ta có } M^3 = 2 + 3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2 \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2 = 2 + 3M \cdot \sqrt[3]{1-x} \leq 2 + 3M \quad (\forall$$

$$\sqrt[3]{1-x} \leq 1 \quad \forall x \geq 0)$$

$$\Rightarrow M^3 - 3M - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (M+1)(M^2 - M - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (M+1)^2 (M-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = -1 \\ M \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \\ b = \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \end{cases} \quad (a \geq 1, b \leq 1)$$

$$+) \text{ Với } M = -1, \text{ ta có } \begin{cases} a + b = -1 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - b \\ -(1 + 3b + 3b^2 + b^3) + b^3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - b \\ b^2 + b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

$$+) \text{ Với } M \leq 2 \Leftrightarrow a + b \leq 2 \Leftrightarrow (a + b)^3 \leq 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \leq 8$$

$$\Leftrightarrow ab(a + b) \leq 2 \Leftrightarrow ab(a + b) \leq a^3 + b^3 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a = b \Leftrightarrow 2a^3 = 2 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

174. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Nếu $a + b \geq 0 \Rightarrow 0 \leq M \leq 2$. Vì M nguyên nên $M = \{0; 1; 2\}$

- $M = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm}$

- $M = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ a^2 - ab + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 1 - 2b + b^2 - b + b^2 + b^2 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 3b^2 - 3b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \\ b = \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \\ a = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \\ b = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \\ a = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \\ b = \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \\ b = \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{x} = \frac{9 + 2\sqrt{21}}{9} \\ 1 - \sqrt{x} = \frac{9 - 2\sqrt{21}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{28}{27} \text{ (TM)}$

- $M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ a^2 - ab + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4b + b^2 - 2b + b^2 + b^2 = 1 \\ a = 2 - b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TM)}$$

Vậy với $x = 0$ hoặc $x = \frac{28}{27}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

(Đề thi HSG 9 quận Ba Đình 2017-2018)

Tìm tất cả các số nguyên x để $\sqrt{x+19}$; $\sqrt{2x+10}$; $\sqrt{3x+13}$; $\sqrt{4x+37}$ đều là số nguyên

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{13}{3}$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x+19} \geq 0 \\ b = \sqrt{4x+37} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x+19 \\ b^2 = 4x+37 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a^2 - b^2 = 39$$

$$\Leftrightarrow (2a - b)(2a + b) = 39$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}; a, b \geq 0; 2a - b \leq 2a + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 39 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a - b = 3 \\ 2a + b = 13 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 10 \\ b = 19 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 10^2 = x+19 \\ 19^2 = 4x+37 \end{cases} \\ \begin{cases} 4^2 = x+19 \\ 5^2 = 4x+37 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 81 \\ x = -3 \end{cases}$$

Với $x=81$ ta có

$$\sqrt{x+19} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{2x+10} = \sqrt{172} \text{ không thỏa mãn}$$

$$\sqrt{3x+13} = \sqrt{256} = 16$$

$$\sqrt{4x+37} = \sqrt{361} = 19$$

Với $x = -3$ ta có

$$\sqrt{x+19} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{2x+10} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3x+13} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4x+37} = \sqrt{25} = 5$$

Vậy $x = -3$ thì $\sqrt{x+19}$; $\sqrt{2x+10}$; $\sqrt{3x+13}$; $\sqrt{4x+37}$ đều là số nguyên

(Đề thi HSG NGHỆ AN 2019-2020)

Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2010}$

Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

Lời giải

$$a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 - 12a$$

$$\Rightarrow a^3 + 12a - 32 = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + 12a - 31 = 1$$

$$\Rightarrow f(a) = 1^{2010} = 1$$

(Đề thi HSG 9 THẠCH HÀ 2018-2019)

Tính giá trị biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}} \sqrt{4 - \sqrt{15}} \right) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})$$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

(Đề thi HSG 9 THẠCH HÀ 2018-2019)

176. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M = \frac{2018}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \quad N = \frac{-2019}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 3}}}$$

Lời giải

Điều kiện xác định của M là $x^2 - 2x - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$$

Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x - \sqrt{2x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{2x+3} \geq 0$ (*)

$$\Leftrightarrow x^2 > 2x+3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases} (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $x > 3$ là điều kiện xác định của M

(Đề thi HSG 9 THẠCH HÀ 2018-2019)

Tính giá trị của biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$

Lời giải

Theo câu a) Ta có $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$ (*)

Áp dụng (*) ta có:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-2)^2}} = \left| \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{(-2)} \right| = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad (\forall \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} > 0)$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$$

$$\text{Suy ra } B = 2019 - \frac{1}{2019} = \frac{4076360}{2019}$$

(Đề thi HSG 9 BÌNH ĐỊNH 2016-2017)

Cho biểu thức:
$$P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

Lời giải

Rút gọn được
$$P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} \text{ (với } m \geq 0, m \neq 1)$$

$$P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1}$$

Ta có: $P \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1$ là ước dương của 2 $\Rightarrow m \in \{4; 9\}$ (TMĐK)

Vậy $m = 4; m = 9$ là giá trị cần tìm.

(Đề thi HSG 9 THANH HÓA 2017 - 2018)

1. Cho biểu thức
$$P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$$
, với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

2. Tính giá trị của biểu thức
$$P = \frac{4(x+1)x^{2018} - 2x^{2017} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}$$
 tại $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Lời giải

1. Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$,

$$\begin{aligned} \text{ta có: } P &= \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{2x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + 2x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Ta có với điều kiện $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$

$$\Rightarrow 0 < P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2$$

Do P nguyên nên suy ra $P=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x=1$ (loại).

Vậy không có giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Chú ý 1: Có thể làm theo cách sau

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Px + (P-1)\sqrt{x} + P - 2 = 0, \text{ coi đây là phương trình bậc hai của } \sqrt{x}.$$

Nếu $P=0 \Rightarrow -\sqrt{x}-2=0$ vô lí, suy ra $P \neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có $\Delta = (P-1)^2 - 4P(P-2) \geq 0 \Leftrightarrow -3P^2 + 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 2P + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (P-1)^2 \leq \frac{4}{3}$

Do P nguyên nên $(P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $(P-1)^2 = 0 \Leftrightarrow P=1 \Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $(P-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P=2 \\ P=0 \end{cases} \Rightarrow P=2 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x=0$ không thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

2. Tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{4(x+1)x^{2018} - 2x^{2017} + 2x + 1}{2x^2 + 3x} \text{ tại } x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}.$$

$$\text{Vì } x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

nên $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2 + 2x - 1$.

$$\text{Do đó } P = \frac{2x^{2017}(2x^2 + 2x - 1) + 2x + 1}{(2x^2 + 2x - 1) + x + 1} = \frac{2x + 1}{x + 1} = 3 - \sqrt{3}.$$

(Đề thi HSG 9 TỈNH AN GIANG 2017-2018)

179. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$

Tính giá trị của P tại $x = \frac{4}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right)$

Lời giải

a) Ta có $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right] : \left[(2\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \right] \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right] : \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right] \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Lại có :

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{|\sqrt{5}+1| + |\sqrt{5}-1|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{4-\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

(Đề thi HSG 9 TỈNH BẾN TRE - 2017-2018)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

$$A = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}+5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2.$$

(Đề thi HSG 9 TỈNH BẮC NINH 2017-2018)

Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 2$.

Lời giải

$$P = \frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\frac{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1} - \sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1)}{\sqrt{2x-1}+1 - \sqrt{2x-1}-1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{x-1}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-1}.$$

(Đề thi HSG 9 HẠ HÒA 2015 -2016)

a) Cho $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

Lời giải

$$a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a \Leftrightarrow a^3 = 32 - 12a \Leftrightarrow a^3 + 12a - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 12a - 31 = 1 \Rightarrow f(a) = 1^{2015} = 1$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Vĩnh Phúc 2017-2018)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2018}{a-1} \right) \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \left(\frac{\sqrt{a} + 2018}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2018}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \right) \frac{\sqrt{a} + 1}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + 2018)(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} - 2018)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} + 1)^2(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{2 \cdot 2017\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)^2(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{2\sqrt{a}} = \frac{2017}{a - 1} \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Vĩnh Phúc 2017-2018)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{z}$

và $y \neq z$. Chứng minh đẳng thức $\frac{x + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{y + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{z}}{\sqrt{y} - \sqrt{z}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{y + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2 - y + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2 - x + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} - \sqrt{z}) + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{(2\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{z}) + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{z})(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 2\sqrt{z})}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 2\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{z}}{\sqrt{y} - \sqrt{z}}. \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Bắc Ninh 2017-2018)

Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2x-1} + 1 - \sqrt{2x-1} - 2\sqrt{2x-1} + 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2x-1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1} - 1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1)}{\sqrt{2x-1} + 1 - \sqrt{2x-1} + 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{x-1}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Bến Tre 2017-2018)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$.

Lời Giải

$$A = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}+5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2.$$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Hải Dương 2017-2018)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

Lời Giải

$A = \frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$ Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có :

$$A = \frac{2\sqrt{x} + x}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{(\sqrt{x} + 2)}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$A = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{x + \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 2}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$A = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$$

Vậy với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có $A = \frac{1}{x - 1}$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Hà Nam 2017 - 2018)

Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$

a) Tìm điều kiện của a và b để M xác định và rút gọn M .

b) Tính giá trị của M khi $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$

Lời giải

a) $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$

ĐK xác định của M : $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$$M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$$

$$= \frac{2a-3b}{a\sqrt{2}+\sqrt{3ab}} = \frac{(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})}{\sqrt{a}(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})} = \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}}{\sqrt{a}}$$

b) Ta có $M = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{3b}{a}}$ với $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{3b}{a} = \frac{30 + 22\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \frac{(30 + 22\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)}{(1 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)} = \frac{102 + 68\sqrt{2}}{17}$$

Vậy $\sqrt{\frac{3b}{a}} = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$

Từ đó $M = \sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) = -2$

(Đề thi HSG 9 tỉnh Hải Dương 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$. Rút gọn $B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có

$$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 2x$$

$$B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - \sqrt{4x - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - |2\sqrt{x} - 1| = 2\sqrt{x} \left(0 \leq x \leq \frac{1}{4} \right)$$

(Thi THPT Chuyên- TP HCM năm học 2010- 2011)

Thu gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

Giải:

Xét $M = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}$

Ta có $M > 0$ và $M^2 = \frac{14 + 2\sqrt{44}}{7 + 2\sqrt{11}} = 2$, suy ra $M = \sqrt{2}$

$$A = M - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$$

(Thi HSG cấp TP Thanh Hóa năm học 2016- 2017)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Giải:

a) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

$$P = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$ (t/m)

Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x=4$

c) Vì $x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < P \leq 2$$

$$\Leftrightarrow P(P-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq 2P$$

Dấu “=” xảy ra khi $P = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $P^2 \leq 2P$

(Thi chuyên tỉnh Hòa Bình năm học 2013- 2014)

a/ Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)^2$

b/ Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $M = \frac{x^2+1}{x-1}$ nhận giá trị nguyên.

Giải:

a) ĐK: $x \geq 0, x \neq 1$

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$$
$$= \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2} = -x + \sqrt{x}$$

b) Ta có $M = x+1 + \frac{2}{x-1}$

M nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của 2

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases} \text{ . KL...}$$

(Thi chuyên Toán tỉnh Hòa Bình năm học 2015- 2016)

1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$

b) $B = \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

2) Rút gọn biểu thức:

$$C = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1$$

Giải:

a) $A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} - \frac{8(1-\sqrt{5})}{-4} + \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3 - \sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}-1)^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{2}-1} + 1 + 1 - \sqrt{\sqrt{2}-1} = 2 \end{aligned}$$

c) ĐK $a \geq 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 - 1]}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 + 1]}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1 = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) - \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) + a + 1 \\ &= a - \sqrt{a} - a - \sqrt{a} + a + 1 = (\sqrt{a} - 1)^2 \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 huyện Kim Thành 2019-2020)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} \quad (x > 0; x \neq 1)$

2) Cho x và y là hai số thỏa mãn: $(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$M = x^{2017} + y^{2017}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{1) } P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) \\ &= x - \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x} + 2 \\ &= x - \sqrt{x} + 1 \end{aligned}$$

2) Nhân 2 vế của $(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5 \quad (1)$ với $(x + \sqrt{x^2 + 5})$ ta được:

$$\begin{aligned} &(x + \sqrt{x^2 + 5})(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5(x + \sqrt{x^2 + 5}) \\ \Leftrightarrow [x^2 - (x^2 + 5)](y - \sqrt{y^2 + 5}) &= 5(x + \sqrt{x^2 + 5}) \\ \Leftrightarrow -5(y - \sqrt{y^2 + 5}) &= 5(x + \sqrt{x^2 + 5}) \\ \Leftrightarrow y - \sqrt{y^2 + 5} &= -x - \sqrt{x^2 + 5} \quad (2) \end{aligned}$$

Tương tự nhân 2 vế của (1) với $(y + \sqrt{y^2 + 5})$ ta được: $x - \sqrt{x^2 + 5} = -y - \sqrt{y^2 + 5} \quad (3)$

Cộng vế với vế của (2) và (3) ta được:

$$\begin{aligned} y - \sqrt{y^2 + 5} + x - \sqrt{x^2 + 5} &= -x - \sqrt{x^2 + 5} - y - \sqrt{y^2 + 5} \\ \Leftrightarrow 2x + 2y = 0 &\Leftrightarrow 2(x + y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \end{aligned}$$

Vậy $M = x^{2017} + y^{2017} = 0$

(Đề thi HSG 9 trường THCS Lương Thế Vinh 2019-2020)

187. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cho biểu thức $A = \left[\frac{x-9}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$

Tính giá trị biểu thức khi $x = 4 \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \right)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{x-9}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \right] : \left(\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Có:

$$\begin{aligned} x &= 4 \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} = \frac{x}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{x^3}{64} &= 6 - \frac{5}{4}x \Leftrightarrow x^3 + 80x - 384 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 4x + 96) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x^2 + 4x + 96 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ (x+2)^2 + 92 = 0 (vn) \end{cases} \Leftrightarrow x = 4(tm) \end{aligned}$$

Thay $x = 4$ (tmđk) vào A, ta được: $A = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = -\frac{9}{4}$

(Đề thi HSG 9 Huyện Hà Trung 2008 - 2009)

Rút gọn biểu thức sau

a. $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$

b. $\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

c. $1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot gx} - \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$

Lời giải

a. $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \\ & = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-2\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \\ & = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \\ & = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } & 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot gx} - \frac{\cos^2 x}{1 + tgx} = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{\cos^2 x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = 1 - \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} \\ & = 1 - \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x)}{(\sin x + \cos x)} \\ & = 1 - (1 - \sin x \cdot \cos x) = \sin x \cdot \cos x \end{aligned}$$

(Đề thi HSG 9 Huyện Hà Trung 2008 - 2009)

$$A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

a. Rút gọn biểu thức A

b. Tính giá trị biểu thức A khi $x=33-8\sqrt{2}$

c. Chứng minh $A < \frac{1}{3}$

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0$; $x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

A khi $x=33-8\sqrt{2}$

$$\text{Ta cã } x=33-8\sqrt{2} = (4\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 4\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow A = \frac{4\sqrt{2}-1}{33-8\sqrt{2}+4\sqrt{2}-1+1} = \frac{4\sqrt{2}-1}{33-4\sqrt{2}}$$

d. Chứng minh $A < \frac{1}{3}$

$$\text{Xét } A - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Do } x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} -(\sqrt{x}-1)^2 < 0 \\ 3(x+\sqrt{x}+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0$$

$$\Rightarrow A - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$$

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐẮC LẮC NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1: Cho số thực a mà $a > 2$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}} + \frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}} \right]$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}} + \frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}} \right] \\ &= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(\sqrt{a-1})^3+1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{a-1})^3-1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(\sqrt{a-1}+1)(a-1-\sqrt{a-1}+1)}{\sqrt{a-1}+1} + \frac{(\sqrt{a-1}-1)(a-1+\sqrt{a-1}+1)}{\sqrt{a-1}-1} \right] \\ &= \frac{1}{a} \cdot (a - \sqrt{a-1} + a + \sqrt{a-1}) = 2 \quad (\text{do } a > 2 \Rightarrow a-1 > 0; \sqrt{a-1}-1 > 0). \end{aligned}$$

(2,0 điểm) ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2016-2017

Cho $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a+b = \sqrt{2}; ab = \frac{1}{4}; a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Lại có } a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a+b).$$

$$= \left[(a+b)^3 - 3ab(a+b) \right] \left[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \right] - a^3b^3(a+b).$$

$$= \left[\sqrt{2^3} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \right] \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{16} \right] - \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{17}{8} - \frac{1}{64} \cdot \sqrt{2} = \frac{169\sqrt{2}}{64}.$$

ĐỀ THI CHỌN HSG PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN NAM TRỰC

1. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$, với $x > 0; x \neq 1$.

2. Cho $x + \sqrt{3} = 2$, tính giá trị biểu thức $A = 7(x^2 - 4x)^{100} + (x^2 - 4x)^{50} + 2016$.

Lời giải

1. Ta có $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^8 - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x} + 1) + 2(\sqrt{x} + 1)$$

$$x - \sqrt{x} + 1.$$

2. Ta có: $x + \sqrt{3} = 2 \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -1$. Suy ra:

$$A = 7(-1)^{100} + (-1)^{50} + 2016 = 2024$$

ĐỀ THI HSG QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 2018-2019

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

2) Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$.

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B .

Lời giải

1) Ta có $A = \frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}} \\
 &= 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$2. A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$$

a) ĐKXD: $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\
 &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x}.
 \end{aligned}$$

$$b) B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

ĐỀ THI HSG VINH NĂM HỌC 2016-2017

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 5x + 3} - 6}{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 7x + 3}}$ tại $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Lời giải

Ta có $x(\sqrt[3]{2} - 1) = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} - 1) = 2 - 1 = 1$

Suy ra $x\sqrt[3]{2} = x + 1 \Rightarrow 2x^3 = (x + 1)^3$ hay $x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

Do đó

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + x^2 + 5x + 3} - 6}{\sqrt{3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - 7x + 3}} = \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 4} - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \\
 &= \frac{\sqrt{4(x+1)^2} - 6}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{2|x+1| - 6}{|x-2|} = \frac{2(x+1) - 6}{x-2} = \frac{2x-4}{x-2} = 2.
 \end{aligned}$$

(vì $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > 2$)

Vậy $P = 2$ tại $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.